INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. T. Bagdonat

QUANTENMECHANIK WS 2000/2001

1. Übungsblatt Abgabe: Dienstag, 24.10.2000, bis 9^{45} Uhr

Sprechstunde: T. Bagdonat, A317, Dienstag ab 14^{00} Uhr, Tel.: 391-5187
Ein Link zu dieser Vorlesung: `http://www.tu-bs.de/institute/theophys/edu.html`

1. **Zerlegung eines Strahlungsfelds in seine Moden.**

   Gegeben sei ein beliebig geformtes (einfach zusammenhängendes) Volumen V, das von metallischen Wänden begrenzt ist und in dem ein Vakuum vorliegt. Die elektromagnetische Strahlung wird beschrieben durch ein Coulomb-geeichtes Vektorpotential $\underline{A}(\underline{x},t)$, so daß also gilt

   $$\mathrm{div}\underline{A}=0 \quad , \quad \underline{E}=-\partial_t\underline{A} \quad \text{und} \quad \underline{H}=\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\underline{A} \quad .$$

   $\underline{A}(\underline{x},t)$ wird zerlegt in eine Überlagerung von Einzelmoden, die durch den Index μ gekennzeichnet werden. Jede Mode wird beschrieben durch eine reelle Funktion des Ortes $\underline{A}_\mu(\underline{x})$ und eine reelle zeitabhängige Amplitude $q_\mu(t)$:

   $$\underline{A}(\underline{x},t)=\sum_\mu \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} q_\mu(t)\underline{A}_\mu(\underline{x}) \qquad .$$

   (a) Leiten Sie aus der Wellengleichung für das Vektorpotential

   $$\Delta\underline{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{A}=0$$

   die beiden Differentialgleichungen

   $$\ddot{q}_\mu+\omega_\mu^2 q_\mu=0 \tag{1}$$

   $$\Delta\underline{A}_\mu+\frac{\omega_\mu^2}{c^2}\underline{A}_\mu=0 \tag{2}$$

   ab.

   (b) Finden sie für den Fall des Würfels mit Kantenlänge L alle Lösungen der Gleichung (2). Die Randbedingungen für eine metallische Wand sind $\underline{E}_\parallel=0$ und $\underline{B}_\perp=0$.

   (c) Zeigen Sie, daß

   $$\langle\underline{A}_\mu|\underline{A}_\nu\rangle=\int_V \underline{A}_\mu(\underline{x})\cdot\underline{A}_\nu(\underline{x})\,dV$$

   ein Skalarprodukt im Raum der auf V definierten Funktionen $\underline{A}_\mu(\underline{x})$ definiert.

   (d) Zeigen Sie weiter, daß bei geeigneter Normierung die Lösungen aus Teil (b) die Orthonormalitätsbeziehung

   $$\langle\underline{A}_\mu|\underline{A}_\nu\rangle=\delta_{\mu\nu}$$

   erfüllen. Diese Beziehung gilt im übrigen auch für beliebige Volumen und folgt allgemein aus den Eigenschaften des Laplaceoperators.

(e) Nun kann man unter Ausnutzung der Orthonormalität der $\underline{A}_\mu$ für wiederum beliebig geformte Volumina zeigen, daß die gesamte elektromagnetische Feldenergie des Systems

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int_V dV \ \left(\varepsilon_0 \underline{E}^2 + \mu_0 \underline{H}^2 \right)$$

in die Summe der Energien der Einzelmoden zerlegbar ist, und dann die Form

$$\mathcal{H} = \sum_\mu \mathcal{H}_\mu = \sum_\mu \left(\frac{1}{2} p_\mu^2 + \frac{1}{2} \omega_\mu^2 q_\mu^2 \right)$$

annimmt, wobei $p_\mu = \dot{q}_\mu$ ist. Versuchen Sie diese Form abzuleiten.

(f) Die q_μ, p_μ bilden jetzt ein System aus Koordinaten, die die Zeitentwicklung des kompletten Strahlungsfeldes beschreiben. Die $\mathcal{H}_\mu$ sind die zugehörigen Hamiltonschen Funktionen, die genau die Form haben, die auch beim harmonischen Oszillator auftaucht. Führen Sie nun noch für die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen eine Hauptachsentransformation durch, und zeigen sie, daß sich die Hamiltonfunktion der Mode μ bei geeigneter Wahl der Vorfaktoren mit den dimensionslosen, komplexen Amplituden $a_\mu(t)$ als

$$\mathcal{H}_\mu = \frac{1}{2} \hbar \omega_\mu \left(a_\mu^* a_\mu + a_\mu a_\mu^* \right)$$

schreiben läßt[1]. Der Stern bezeichnet komplexe Konjugation.

[1] Es gilt hier natürlich noch $a_\mu^* a_\mu + a_\mu a_\mu^* = 2 a_\mu^* a_\mu$; die Schreibweise wurde nur gewählt, da diese Form später noch einmal auftauchen wird.