Didaktische Aspekte des quantenmechanischen Zustandsbegriffs[1]

Rainer Müller, Roland Berger und Hartmut Wiesner

1 Einleitung

Bei der Planung und Vorbereitung eines Unterrichtsgangs über Quantenphysik stellen sich als erstes die Fragen: Welche Ziele sollen mit dem Unterricht angestrebt werden? Welche Einsichten über die Besonderheiten der Quantentheorie gegenüber der klassischen Physik sollen die Schülerinnen und Schüler gewinnen? Was soll als das Neue, das die Quantenphysik besonders Charakterisierende, herausgestellt werden? Die Antworten auf diese Fragen bestimmen weitgehend die Konzeption des Quantenphysiklehrgangs. Nun gibt es auf pädagogische Zielfragen keine eindeutigen Antworten – schon gar nicht deduktiv aus allgemeinen Bildungszielen abgeleitete Antworten für den Physikunterricht – sondern nur mehr oder weniger überzeugende Argumente für die eine oder andere Entscheidung. Für den Bereich der Quantentheorie kommt erschwerend hinzu, daß über die Interpretation des quantenmechanischen Formalismus auch in der Wissenschaft immer noch kein Konsens besteht [1, 2, 3, 4, 5, 6].

Ein weiteres Problem erschwert die Festlegung auf bestimmte Antworten: Sehr viele Lehrerinnen und Lehrer bewerten die fachliche und fachdidaktische Ausbildung im Bereich Quantenmechanik als nicht ausreichend für das eigene Verständnis und für didaktische Entscheidungen – nach unseren Erfahrungen zu Recht. Viele Diskussionen mit Kolleginnen und Kollegen und Studentinnen und Studenten haben gezeigt, daß erhebliche Unklarkeiten bestehen über Fragen wie: Welche Eigenschaften kann man einem Quantenobjekt in einem bestimmten Zustand zuschreiben? Welche Ergebnisse kann eine quantenmechanische Messung liefern? Ein vertieftes Verständnis solcher Probleme ist aber für die didaktische Diskussion und die Bewertung von Unterrichtseinheiten notwendig, schon um eine gemeinsame Diskussionsbasis zu haben.

Im folgenden soll daher das unserer Ansicht nach notwendige Wissen zum quantenmechanischen Zustandsbegriff zusammengestellt werden. In diesem Aufsatz werden dabei die begrifflichen Grundlagen dargestellt, während sich zwei Folgebeiträge mit konkreten Problemen aus der Quantenphysik (Potentialtopf, Wasserstoffatom) beschäftigt.

Der von uns verwendete rote Faden besteht in der Frage, wann man in der Quantenmechanik annehmen darf, daß Quantenobjekte eine bestimmte dynamische Eigenschaft (wie Ort, Impuls, Energie) besitzen und wann dies unzulässig ist [7]. Für uns liegt in der Antwort auf diese Frage einer der wesentlichen Unterschiede zwischen klassischer Mechanik und Quantenphysik und ein erfolgversprechender Ansatz für ein Unterrichtskonzept zur Quantenphysik (s. z. B. [8, 9]).

2 Dynamische Eigenschaften von Quantenobjekten

In der klassischen Physik wird generell angenommen, daß einem Objekt zu jedem Zeitpunkt ein exakter Wert seiner dynamischen Variablen zukommt. Das heißt, daß es sich zu jedem Zeitpunkt an einem wohldefinierten Ort befindet und einen bestimmten Impuls besitzt. Zwar kann man

[1]Physik in der Schule **36**, 54 (1998)

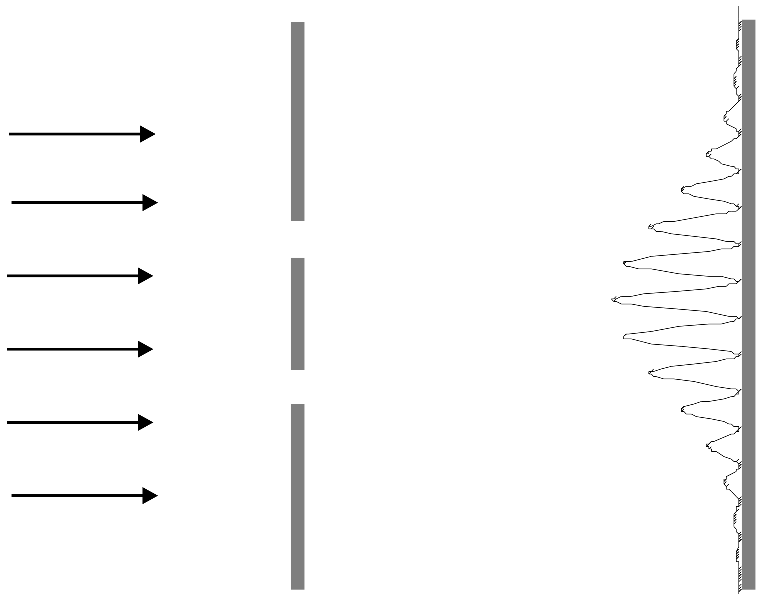

Abbildung 1: Doppelspalt-Experiment.

diese Werte experimentell nicht exakt bestimmen. Aber auch das Nichtwissen ändert nichts an der Auffassung, daß den Größen an sich exakte Werte zukommen.

Selbst die alte, schon auf Berkeley zurückgehende philosophische Spitzfindigkeit, nach der man niemals beweisen können wird, ob der Stuhl im Nebenzimmer auch vorhanden ist, wenn ihn gerade niemand beobachtet, kann diese Überzeugung nicht erschüttern. Denn die Vorstellung, daß die Objekte sich auch dann an einem bestimmten Ort befinden, wenn sie von niemandem beobachtet werden, ist die einfachste konsistente Theorie, die mit allen unseren Erfahrungen in der klassischen Physik übereinstimmt [7]. Keine unserer empirischen Erkenntnisse zwingt uns, von dieser Ansicht abzurücken.

In der Quantenmechanik sind die Verhältnisse anders. Nimmt man an, daß Quantenobjekte ebenfalls zu jedem Zeitpunkt einen festen Wert aller ihrer dynamischen Eigenschaften besitzen, gerät man schnell in Widerspruch zu den Vorhersagen der Quantentheorie. Das läßt sich am einfachsten anhand des bekannten Doppelspalt-Experiments belegen, das in fast jedem Lehrbuch Aufnahme gefunden hat (Abb. 1). Elektronen treffen mit einem bestimmten Impuls auf einen Doppelspalt. Nachdem sie die Spaltebene passiert haben, treffen sie auf einen Schirm. Dort baut sich das charakteristische Interferenzmuster auf.

Nach der auf den ersten Blick plausibelsten Hypothese, die sich aus unseren Vorerfahrungen mit der klassischen Physik aufdrängt, gelangt ein Elektron *entweder* durch den oberen *oder* durch den unteren Spalt zum Schirm. Mit anderen Worten: Es wird angenommen, daß jedes Elektron in der Spaltebene die Eigenschaft „Ort“ besitzt (auch wenn dieser nicht beobachtet wird).

Diese Annahme ist nach der üblichen Interpretation der Quantenmechanik allerdings *falsch*. Denn wäre es so, daß ein Elektron in der Spaltebene einen festen, wenn auch unbekannten Ort besitzt, könnte man die Figur auf dem Schirm auch dadurch erhalten, daß man zunächst den oberen Spalt verschließt und wartet, bis sich die Schirmfigur allein für den unteren Spalt aufgebaut hat. Anschließend wiederholt man dies mit verschlossenem unterem und geöffnetem oberen Spalt. Das Ergebnis dieses Versuchs ist aber keineswegs das bei zwei geöffnete Spalten beobachtete Interferenzmuster, sondern eine einfache Überlagerung der beiden Einzelspalt-Muster. Die

Eigenschaft „Ort“ kann einem Elektron unter diesen Umständen nicht zugeschrieben werden. Die Auffassung, daß ein Elektron durch genau einen der beiden Spalte geht, ist nicht aufrechtzuerhalten. Diese Erkenntnis, die unserer klassischen Anschauung völlig zuwiderläuft, kann man allgemein folgendermaßen formulieren: *In der Quantenmechanik ist es möglich, daß Objekte klassisch wohldefinierte Eigenschaften wie Ort, Impuls oder Energie* **nicht** *besitzen.*

3 Präparation quantenmechanischer Zustände

Nun ist es nicht so, daß Quantenobjekte unter gar keinen Umständen dynamische Eigenschaften besitzen. Mit Hilfe geeigneter experimenteller Techniken ist die gezielte Herstellung von Eigenschaften wie Ort, Impuls, kinetischer Energie oder Drehimpuls möglich. Ein Verfahren, mit dem man (im allgemeinen an einem ganzen Ensemble von Quantenobjekten) eine bestimmte Eigenschaft herstellt, nennt man *Präparation.* Eine Einführung in den Begriff der Präparation wurde bereits in [2] im Zusammenhang mit der statistischen Interpretation der Quantenmechanik gegeben.

Ein Beispiel ist ein Ensemble von Elektronen, das auf Impulseigenschaft präpariert wird, indem man die Elektronen ein Wien-Filter aus gekreuzten elektrischen und magnetischen Feldern durchlaufen läßt. Der Impuls derjenigen Elektronen, die das Filter unabgelenkt passieren, ergibt sich dabei aus dem Betrag der Feldstärken. Ein anderes Beispiel ist die Präparation der Eigenschaft „Drehimpulskomponente in z-Richtung“, die man mit Hilfe einer Stern-Gerlach-Apparatur durch Ausblenden einer der beiden Strahlen herstellen kann.

Ein Kriterium dafür, daß die durch eine Präparationsapparatur hergestellten Quantenobjekte eine bestimmte Eigenschaft A haben ist das folgende: *Führt man Messungen der Größe A (also z. B. Ort, Impuls usw.) an einem ganzen Ensemble von identisch präparierten Quantenobjekten durch und findet bei jeder einzelnen Messung den Wert A_0, dann besitzen die Quantenobjekte die Eigenschaft A.* Mit anderen Worten: Die statistische Streuung der Meßwerte verschwindet. Wenn wir also von einem Quantenobjekt sagen, daß es eine bestimmte Eigenschaft hat, z. B. den Impuls p_0, dann finden wir mit Sicherheit bei einer Impulsmessung den Wert p_0.

Nimmt man also zum Beispiel bei der Impulspräparation ein Impuls-Meßgerät und bestimmt den Impuls aller Elektronen, die das Wien-Filter passieren, erhält man *immer* den Wert $p_0 = |\vec{E}|/(m|\vec{B}|)$ (von den in der Realität unvermeidlichen Meßungenauigkeiten wird hier abgesehen). Wie nicht anders zu erwarten, besitzt das im Wien-Filter präparierte Ensemble von Elektronen die Eigenschaft „Impuls“; der Wert des Impulses ist p_0.

Wenn ein Ensemble von Quantenobjekt eine Impulseigenschaft besitzt, ist es erlaubt, sich wie in der klassischen Physik vorzustellen, daß jedes einzelne Mitglied dieses Ensembles – unabhängig von Messungen – den entsprechenden Impulswert besitzt, mit allen klassisch erlaubten Konsequenzen. Solche klassischen Aussagen über andere Größen sind aber auch dann nur erlaubt, wenn diese ebenfalls den Status einer „Eigenschaft“ haben.

Wir haben bei diesem Beispiel absichtlich den Begriff „scharfer Impuls“ vermieden, der oft in diesem Zusammenhang gebraucht wird. Er könnte suggerieren, daß das Nichtvorliegen einer Eigenschaft etwas mit der Ungenauigkeit von Messungen zu tun haben könnte. Es ist wichtig zu betonen, daß dies nicht der Fall ist und daß die quantenmechanischen Streuungen beim Nichtvorliegen einer Eigenschaft sich begrifflich grundsätzlich unterscheiden von den klassischen Streuungen, die durch die endliche Genauigkeit einer Messung bedingt sind.

Auch auf der Theorieebene läßt sich formulieren, wann man Quantenobjekten eine bestimmte Eigenschaft zuordnen darf: *Ist $\hat{A}$ der Operator, der der Eigenschaft A zugeordnet ist, und ψ die Wellenfunktion der betrachteten Quantenobjekte, dann besitzen die Quantenobjekte die Eigenschaft A, wenn die Eigenwertgleichung $\hat{A}\psi = a_0\psi$ erfüllt ist.* Das heißt, daß die Anwendung des Operators $\hat{A}$ auf die Zustandsfunktion ψ eine Funktion liefern muß, die proportional zu ψ ist:

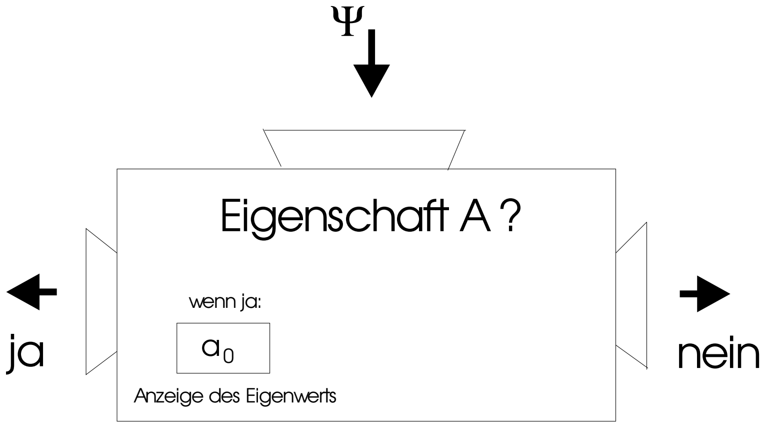

Abbildung 2: Eigenwertgleichung als Maschine

$\hat{A}\psi \sim \psi$. Ist diese Gleichung erfüllt, kann man an der Proportionalitätskonstanten a_0, dem sogenannten *Eigenwert*, den Wert von A ablesen. Die Wellenfunktionen, die die Eigenwertgleichung erfüllen, heißen *Eigenfunktionen* (oder *Eigenzustände*) von $\hat{A}$. Ist ein Ensemble von Quantenobjekten in einem Eigenzustand von $\hat{A}$, ist das gleichbedeutend mit der Aussage, daß die Objekte die Eigenschaft A besitzen. Entsprechend liefern alle Messungen dieser Größe streuungsfrei den Eigenwert a_0. Ist die Eigenwertgleichung dagegen nicht erfüllt, kommt den Quantenobjekten im Zustand ψ die Eigenschaft A *nicht* zu.

Ein Beispiel kann die Handhabung der Eigenwertgleichung illustrieren: Auf Impuls präparierte Elektronen werden durch die Wellenfunktion $\phi_{p_0} = C \exp(ip_0 x/\hbar)$ beschrieben (normiert man die Wellenfunktion, erhält man für die Konstante $C = 1/\sqrt{2\pi\hbar}$). Der Impulsoperator ist $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$. Wendet man ihn auf ϕ_{p_0} an, ergibt sich:

$$\hat{p}\,\phi_{p_0} \equiv \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\phi_{p_0} = p_0\, C \exp(ip_0 x/\hbar) = p_0 \phi_{p_0}. \tag{1}$$

Vergleicht man die Terme ganz links und ganz rechts, erkennt man, daß die Eigenwertgleichung $\hat{p}\phi_{p_0} = p_0\phi_{p_0}$ erfüllt ist. Die Elektronen besitzen also die Eigenschaft „Impuls“ und der Wert des Impulses ist p_0. Wir dürfen uns also vorstellen, daß die Elektronen zwischen Präparation und Meßakt den Impuls p_0 *haben*, und wir messen mit Sicherheit an jedem Elektron den Impuls p_0. Die Streuung der Impulswerte ist Null.

Anschaulich kann die Eigenwertgleichung als eine Art „Maschine“ aufgefaßt werden, die anzeigt, ob ein Quantenobjekt im Zustand ψ die Eigenschaft A besitzt oder nicht (Abb. 2). Dazu wird getestet, ob $\hat{A}\psi$ proportional zu ψ ist. Lautet die Antwort „ja“, zeigt die Maschine zusätzlich den Wert von A an (die Proportionalitätskonstante a_0).

Weitere Beispiele für Quantenobjekte mit definierten Eigenschaften findet man in der Atomphysik. Ein Elektron im Wasserstoffatom, das sich im Zustand ψ_{nlms} mit den Quantenzahlen (n, l, m, s) befindet, erfüllt die Eigenwertgleichungen für die Gesamtenergie, den Betrag des Drehimpulses, die z-Komponente des Drehimpulses und die z-Komponente des Spins. Bei jeder Messung einer dieser Größen findet man entsprechend die Meßwerte $E_n = -13{,}6\text{eV} \cdot 1/n^2$ (Gesamtenergie), $L^2 = l(l+1)\hbar^2$ (Drehimpulsquadrat), $L_z = m\hbar$ (z-Komponente des Drehimpulses) und $S_z = s\hbar$ (z-Komponente des Spins). Da die Meßwerte für diese Größen streuungsfrei sind, besitzt ein Elektron im Zustand ψ_{nlms} des Wasserstoffatoms alle die genannten Eigenschaften. Daß es andererseits auch Eigenschaften gibt, die ihm nicht zugeschrieben werden können, wird die Diskussion im nächsten Abschnitt zeigen.

4 Zustände, Meßwerte und Eigenschaften

Nach dem oben formulierten Kriterium kommt einem Ensemble von Quantenobjekten eine Eigenschaft zu, wenn man bei jeder Einzelmessung der entsprechenden Größe den gleichen Wert findet. Es stellt sich die Frage: Was kann man über Quantenobjekte aussagen, denen eine bestimmte Eigenschaft *nicht* zukommt? Offenbar wird dann nicht bei jeder Einzelmessung dieser Eigenschaft der gleiche Wert gemessen. Die Meßwerte *streuen.*

Ein wohlbekanntes Beispiel für eine solche Situation ist die Eigenschaft „Ort" in Atomen. Führt man z. B. an einer Reihe von Elektronen im Grundzustand des Wasserstoffatoms eine Ortsmessung durch, wird man nicht bei jeder Einzelmessung den gleichen Wert finden. Die Orts-Meßwerte bilden eine statistische Verteilung um den Kern, nämlich genau die in vielen Schulbüchern abgebildete „Elektronenwolke" des 1s-Orbitals. Es ist auch bekannt, wie man aus der Wellenfunktion $\psi(\vec{x})$, die den Zustand der Elektronen charakterisiert, diese statistische Verteilung theoretisch berechnen kann: $|\psi(\vec{x})|^2 dV$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, ein Elektron bei einer Ortsmessung im Volumenelement dV um den Ort $\vec{x}$ herum zu finden.

Da die Meßwerte streuen, besitzen die Elektronen im Grundzustand des Wasserstoffatoms die Eigenschaft „Ort" *nicht.* Das ist eine wichtige Erkenntnis, die von vielen Schülern nicht nachvollzogen wird. Es ist nicht erlaubt, sich vorzustellen, daß die Elektronen im Atom einen Ort haben, der bestimmt, wenn auch unbekannt ist. Dies hat der oben beschriebene Doppelspaltversuch deutlich gemacht.

Noch eine andere Einsicht läßt sich an diesem Beispiel ablesen. Bei jeder Einzelmessung findet man das Elektron irgendwo. Bestrahlt man z. B. das Atom mit einem Laserpuls mit hinreichend kurzer Wellenlänge, wird die vom Elektron gestreute Strahlung genau von einem Punkt ausgehen. Das heißt, selbst wenn dem Elektron im Atom die Eigenschaft „Ort" nicht zukommt, liefert jede Ortsmessung genau einen Orts-Meßwert. Allerdings ergeben sich in verschiedenen Einzelmessungen jeweils verschiedene Werte, deren statistische Streuung durch $|\psi|^2$ bestimmt wird.

Man sieht daran, daß man an einer einzelnen Messung noch nicht ablesen kann, ob dem gemessenen Elektron die Eigenschaft „Ort" zukommt oder nicht. Dazu bedarf es einer ganzen Meßreihe an einem Ensemble von identisch präparierten Elektronen. Nur so kann man entscheiden, ob die Meßwerte streuen oder nicht, ob also die Eigenschaft „Ort" vorliegt oder nicht. Wir halten fest: *Aus der Tatsache, daß das Elektron an einem Ort gefunden wird, folgt noch nicht, daß es unmittelbar vorher auch dort war.*

Eine andere Charakteristik quantenmechanischer Messungen muß noch erwähnt werden: Das Resultat einer Einzelmessungen der Größe A kann nur einer der Eigenwerte von A sein. Meßergebnisse, die dazwischen liegen, sind nicht möglich. Zum Beispiel mißt man beim Stern-Gerlach-Versuch mit Silberatomen entweder die Drehimpulskomponente $s_z = +\frac{1}{2}\hbar$ oder $-\frac{1}{2}\hbar$. In aufeinanderfolgenden Einzelmessungen werden im allgemeinen verschiedene Eigenwerte gefunden, und der Mittelwert daraus kann durchaus eine „krumme" Zahl, also kein Eigenwert sein. Das ändert aber nichts an der Tatsache, daß bei der einzelnen Messung nur die Eigenwerte auftreten können. Häufig betrachtet man allerdings Größen wie Ort und Impuls, die ein kontinuierliches Spektrum von Eigenwerten besitzen. Hier ist die Einschränkung der möglichen Meßwerte nicht bemerkbar.

Die Wahrscheinlichkeit, bei einem Experiment einen bestimmten Meßwert zu finden, läßt sich nicht nur für den Ort berechnen. Man kann die Verteilung der Meßwerte für jede beliebige Größe A berechnen. Die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung von A den Wert a zu erhalten, ist gegeben durch

$$w(a) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \phi_a^*(x) \psi(x) \right|^2 . \tag{2}$$

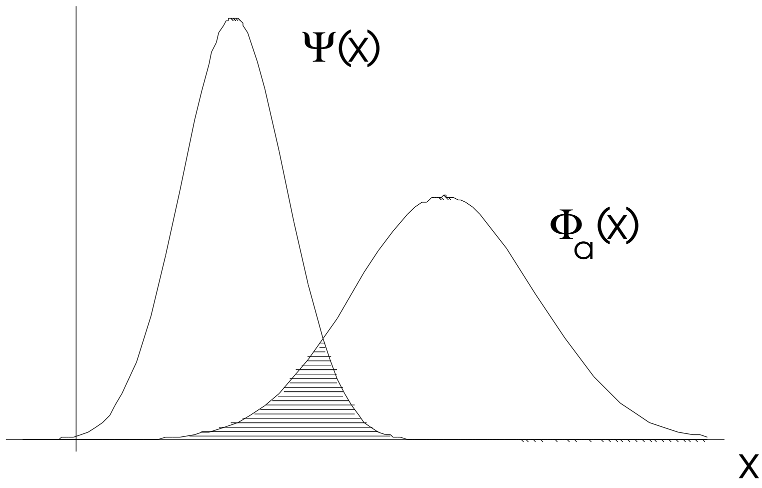

Abbildung 3: Berechnung der Wahrscheinlichkeit für einen Meßwert a

Dabei ist ψ die Wellenfunktion des betrachteten Quantensystems und ϕ_a ein Eigenzustand von $\hat{A}$ zum Eigenwert a. Dieser Ausdruck kann anschaulich interpretiert werden (Abb. 3). Der Integrand ist nur dort ungleich Null, wo sowohl ϕ_a als auch ψ von Null verschieden sind. Daher trägt nur der schraffierte Bereich zum Integral bei. Sind die beiden Funktionen ψ und ϕ_a in der Form sehr verschieden, so ist die Wahrscheinlichkeit, den entsprechenden Meßwert zu erhalten, sehr gering, da das Produkt im Integranden klein ist. Befindet sich das Ensemble umgekehrt sogar in einem Eigenzustand, ist also $\psi = \phi_a$, so ergibt das Integral den Wert 1 (denn so ist ϕ_a normiert). In diesem Spezialfall führt eine Messung der Größe A mit Sicherheit zum Wert a, in Übereinstimmung mit den Überlegungen oben.

Ein Fehlurteil über den Ortsbegriff, zu dem viele Schüler gelangen, muß hier korrigiert werden: Sehr weit verbreitet ist die Ansicht, daß es deshalb nicht möglich sei, den Elektronen im Atom einen Ort zuzuordnen, weil diese sich so schnell bewegten. Eine Ortsmessung sei deshalb sehr schwierig, außerdem bewegten sich die Elektronen gleich wieder von dem gemessenen Ort weg. Es ist wichtig zu betonen, daß die Aussagen der Quantenmechanik über die Eigenschaften von Quantenobjekten auf einer viel tieferen, fundamentaleren Ebene anzusiedeln sind, wo von solchen, im Prinzip behebbaren Problemen abgesehen wird. Trotzdem ist es wichtig, auf solche Vorstellungen im Unterricht einzugehen, um sie zu vermeiden.

5 Beschränkungen bei der Präparation quantenmechanischer Zustände

Ein wichtiges Ergebnis der letzten Abschnitte ist, daß den Quantenobjekten dynamische Eigenschaften nicht von vornherein zugeschrieben werden dürfen. Erst wenn die gewünschte Eigenschaft (z. B. Impuls) mittels einer Präparationsapparatur hergestellt wurde, kann man sagen, daß die betreffenden Quantenobjekte diese Eigenschaft wirklich besitzen. Wie erwähnt, ist das formale Kriterium dafür, daß der Zustand ψ der Quantenobjekte die Eigenwertgleichung des Impulses erfüllt (vgl. (1)). Führt man eine Messung dieser Eigenschaft an einem Ensemble von derart präparierten Quantenobjekten durch, so wird immer derselbe Meßwert gefunden, die Streuung beträgt Null.

Man kann sich die Frage stellen, ob die Präparation von Eigenschaften in irgendeiner Weise beschränkt ist. Ist es z. B. möglich, beliebige Eigenschaften gleichzeitig zu präparieren? In der klassischen Physik wird es als selbstverständlich vorausgesetzt, daß ein Objekt alle in Frage kommenden Eigenschaften (wie Impuls, Drehimpuls, Energie, Ort) gleichzeitig besitzt. Im Gegensatz dazu ist es ein charakteristischer Zug der Quantenphysik, daß bei der gleichzeitigen Präparation von Eigenschaften Beschränkungen bestehen. So ist es etwa unter keinen Umständen möglich, an einem Ensemble von Quantenobjekten Ort und Impuls gleichzeitig zu präparieren. Denn das hieße, daß man an einem Teil des Ensembles Ortsmessungen und an einem anderen Teil Impulsmessungen durchführen könnte, mit dem Ergebnis, daß sowohl die Streuungen der Orts- als auch die Streuungen der Impulsmeßwerte Null wären. Ein solches Ergebnis wird aber von der *Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation*

$$\Delta x \, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

nicht zugelassen, die aussagt, daß das Produkt der Streuungen von Orts- und Impulsmeßwerten den Minimalwert $\hbar/2$ nicht unterschreiten kann (für eine ausführliche Diskussion der Bedeutung der Unbestimmtheitsrelation s. [3]).

Nach der Unbestimmtheitsrelation können also Quantenobjekte *niemals* die Eigenschaften „Ort“ und „Impuls“ gleichzeitig besitzen. Dies ist eine der fundamentalsten Einsichten der Quantenmechanik und eine der Stellen, an denen klassische und Quantenphysik grundsätzlich voneinander abweichen. Diese Nichtvereinbarkeit von Eigenschaften ist nicht nur auf Ort und Impuls beschränkt. Sie gilt allgemein für Operatoren, die nicht vertauschbar sind, d. h. für jedes Paar von Operatoren $\hat{A}, \hat{B}$ für die

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

nicht Null ist. Die Eigenschaften A und B können nicht gleichzeitig realisiert sein.

Dies läßt sich auch anhand der Eigenwertgleichung verdeutlichen, die ja für beide Größen A und B erfüllt sein müßte, wenn den betrachteten Quantenobjekten im Zustand ψ beide Eigenschaften gleichzeitig zukämen. Das heißt, es müßten die beiden folgenden Gleichungen für ψ erfüllt sein:

$$\hat{A}\psi = a\psi,$$
$$\hat{B}\psi = b\psi,$$

wobei a und b die entsprechenden Eigenwerte (also reelle Zahlen) sind. Daß beide Gleichungen für nichtvertauschbare Operatoren nicht gleichzeitig erfüllt sein können, wird in Kasten 1 am Beispiel von Ort und Impuls gezeigt.

6 Konsequenzen für den Schulunterrricht

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir intensiv untersucht, was es bedeutet, wenn man sagt, daß sich ein Quantenobjekt (bzw. ein Ensemble von Quantenobjekten) in einem bestimmten Zustand befindet. Am Beispiel des Doppelspalt-Experiments haben wir gesehen, daß den Elektronen in der Spaltebene die Eigenschaft „Ort“ nicht zugeschrieben werden kann. Dies führte uns zur allgemeinen Einsicht, daß Quantenobjekte klassisch wohldefinierte Eigenschaften *nicht* besitzen können. Nach unserer Auffassung besteht hier einer der grundlegenden Unterschiede zwischen klassischer und Quantenphysik. Bei der üblichen Vorgehensweise im Quantenphysik-Unterricht an der Schule wird diese Einsicht bestenfalls am Rand und meist wenig überzeugend vermittelt. Im Gegenteil: Sehr häufig wird den hier dargestellten Ergebnissen

Kasten 1: Gleichzeitige Eigenfunktionen von Ort und Impuls?

Für Orts- und Impulsoperator gilt $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$, d. h. sie vertauschen nicht. Wir wollen zeigen, daß es keine Funktionen $\phi_{p_0 x_0}$ gibt, die gleichzeitig Eigenfunktionen von Ort und Impuls sind, für die also gleichzeitig die Eigenwertgleichungen

$$\hat{x}\phi_{p_0 x_0} = x_0 \phi_{p_0 x_0}, \qquad \hat{p}\phi_{p_0 x_0} = p_0 \phi_{p_0 x_0}$$

gelten. Nehmen wir an, es gäbe solche Funktionen. Dann betrachten wir den Ausdruck $\hat{x}\hat{p}\phi_{p_0 x_0} - \hat{p}\hat{x}\phi_{p_0 x_0}$. Durch Anwenden der Eigenwertgleichung erhalten wir

$$(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x})\,\phi_{p_0 x_0} = \hat{x}p_0\phi_{p_0 x_0} - \hat{p}x_0\phi_{p_0 x_0}.$$

Die Werte x_0 und p_0 sind aber reine Zahlen, die wir unbesorgt mit den links davon stehenden Operatoren vertauschen dürfen. Wir können dann noch einmal die Eigenwertgleichung anwenden und finden als Ergebnis Null:

$$(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x})\,\phi_{p_0 x_0} = p_0 x_0 \phi_{p_0 x_0} - x_0 p_0 \phi_{p_0 x_0} = 0.$$

Andererseits kann man direkt die Vertauschungsrelation einsetzen:

$$(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x})\,\phi_{p_0 x_0} = [\hat{x}, \hat{p}]\,\phi_{p_0 x_0} = i\hbar\phi_{p_0 x_0},$$

was von Null verschieden ist. Der Widerspruch, auf den wir durch unsere Annahme geführt worden sind, zeigt, daß es gleichzeitige Eigenfunktionen $\phi_{p_0 x_0}$ für Ort und Impuls nicht geben kann. Nur für vertauschbare Größen gibt es gemeinsame Eigenfunktionen.

der elementaren Quantentheorie in vielen Vereinfachungen nicht nur kaum Rechnung getragen, sondern auf die eine oder andere Art auch noch unzulässiges klassisches Denken in den Bereich der Quantenphysik hineingetragen. In zwei Folgebeiträgen werden wir daher die für den Schulunterricht zentralen Systeme des unendlichen Potentialtopfs und des Wasserstoffatoms quantitativ daraufhin analysieren, welche dynamischen Eigenschaften man den entprechenden Quantenobjekten zuschreiben kann und welche nicht. Wir werden dazu für die genannten Systeme neben der bekannten Ortsverteilung die Verteilungen von Impuls, kinetischer und potentieller Energie diskutieren.

In unserem Entwurf zu einem Unterrichtskonzept für die Quantenphysik in der Sekundarstufe II, das auf den Vorschlägen von Wiesner und Engelhardt [8] beruht, stellen wir daher (in Anlehnung an [7]) das folgende Ziel in den Mittelpunkt:

> Die Schülerinnen und Schüler sollen erkennen, daß Quantenobjekte in Zustände gebracht werden können, in denen sie bestimmte Eigenschaften *nicht* haben, obwohl man bei einer Messung einen Wert für diese Eigenschaft bekommt.
>
> Quantenobjekte können aber auch so präpariert werden, daß sie eine Eigenschaft *haben.*

Die Schüler sollen einsehen, daß die beiden Aussagen „ein Objekt hat die Eigenschaft A“ und „am Objekt wird die Eigenschaft A“ gemessen, die in der klassischen Physik als im wesentlichen gleichwertig angesehen werden, in der Quantenmechanik als grundsätzlich verschiedene Aussagen anzusehen sind.

In begrifflicher Hinsicht wird dabei in dem geplanten Konzept der oben diskutierte Begriff der

Präparation von entscheidender Bedeutung sein. Anhand dieses Leitgedankens kann man dann zum Begriff des Zustands übergehen und in einfacher Form Operatoren für physikalische Größen einführen. In guten Leitungskursen kann man sogar die Eigenwertgleichung einführen, die als Instrument dient, um mathematisch zu bestimmen, ob ein System eine bestimmte dynamische Eigenschaft besitzt oder nicht. Erste Erfahrungen mit der praktischen Unterrichtserprobung eines solchen Zugangs, die zu guten Lernerfolgen führten, sind in [9] geschildert.

Aber selbst wenn man einen begrifflich und mathematisch weniger aufwendigen Zugang bevorzugt, halten wir es für angebracht, auf den in dieser Arbeit angesprochenen Themenkreis zumindest ansatzweise einzugehen. Andernfalls besteht die Gefahr, daß die Schülerinnen und Schüler die wesentlichen Besonderheiten der Quantenphysik nur unzureichend erfassen und über quasiklassische Vorstellungen nicht herauskommen. Zur Vermittlung der spezifisch quantenmechanischen Einsichten eignet sich nach unserer Auffassung am besten das Doppelspalt-Gedankenexperiment, das in einer Vielzahl von Variationen dazu beitragen kann, in einer rein qualitativen Weise in die quantenmechanische Denkweise einzuführen. Da in den meisten Darstellungen (Ausnahmen sind [10, 11] bei weitem nicht alle Möglichkeiten ausgeschöpft werden, die dieses Gedankenexperiment bietet, werden wir in einem weiteren Beitrag ausführlich auf die Möglichkeiten eingehen, es für den Schulunterricht nutzbar zu machen.

Literatur

[1] R. Müller, B. Schmincke, H. Wiesner, *Atomphysik und Philosophie – Niels Bohrs Interpretation der Quantenmechanik* Physik in der Schule **34**, 165 (1996).

[2] H. Wiesner, R. Müller, *Die Ensemble-Interpretation der Quantenmechanik*, Physik in der Schule **34**, 343, 379 (1996);

[3] R. Müller, H. Wiesner, *Die Interpretation der Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation*, Physik in der Schule **35**, 176, 218 (1997).

[4] M. Jammer, *The philosophy of quantum mechanics*, New York 1974.

[5] K. Baumann, R. U. Sexl (Hrsg.), *Die Deutungen der Quantentheorie*, Braunschweig 1984.

[6] F. Selleri, *Die Debatte um die Quantenmechanik*, Braunschweig 1983.

[7] L. Eisenbud , *The Conceptual Foundations of Quantum Mechanics*, New York 1971.

[8] P. Engelhardt, H. Wiesner, *Präparationsexperimente als Leitlinie einer Einführung in die Quantenphysik für Grund- und Leistungskurse*, Physik in der Schule **34** (1994), 271.

[9] H. Wiesner, *Eine Einführung in die Quantentheorie für Leistungskursschüler: Konzeption und erste unterrichtliche Erfahrungen*, in: H. Fischler (Hrsg.): *Quantenphysik in der Schule*, IPN Kiel (1992), S. 270.

[10] R. P. Feynman, *Vorlesungen über Physik Bd. III: Quantenmechanik*, Oldenbourg, München (1971).

[11] A. Brachner, R. Fichtner, *Quantenmechanik für Lehrer und Studenten*, Schroedel, Hannover (1977); dies., *Quantenmechanik*, Schroedel, Hannover (1980).