

Von der Unzulänglichkeit des Einfachen – konkrete und abstrakte Vorstellungen in der Quantenphysik

Rainer Müller und Hartmut Wiesner

„In der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts war aus den großen Erfolgen der kinetischen Gastheorie und der mechanischen Theorie der Wärme ein Ideal der exakten Naturbeschreibung hervorgewachsen, das als Krönung jahrhundertelangen Forschens und Erfüllung jahrtausendelanger Hoffnung einen Höhepunkt bildet und das klassische heißt“. So eröffnet Schrödinger 1935 seinen großen Aufsatz „Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik“ [1]. Zu dieser Zeit war der quantenmechanische Formalismus, mit dem eine neue Epoche in der Physik beginnen sollte, längst zur Reife entwickelt. Wie so oft war das, was als klassisch erkannt wurde, schon unwiederbringlich dahin. Der universelle Gültigkeitsanspruch der bisherigen physikalischen Denkweisen war nicht mehr aufrecht zu erhalten. Eine gänzlich neuartige Physik war entstanden, die in ihren wesentlichen Zügen, in ihrer Unanschaulichkeit und Abstraktheit, nicht mehr viel mit dem Paradigma einer physikalischen Theorie gemein hatte, das die Newtonsche Mechanik bis dahin dargestellt hatte. Schrödinger war sich dieses Verlustes schmerzlich bewußt, und er bekennt „daß die herrschende Lehrmeinung aus Bedrängnis geboren ist“.

Es ist nicht verwunderlich, daß sich die gleiche Bedrängnis bei Lehrerinnen und Lehrern wiederfindet, die die komplexen Zusammenhänge in der Schule vermitteln möchten, aber in der Schule den weitaus größten Teil ihrer Unterrichtstätigkeit mit der Einführung in die Auffassungen der klassischen Physik verbringen. Könnte man nicht eine einfachere, vor allem anschaulichere Theorie finden? Und ergänzend aus didaktischer Perspektive: Gibt es Elementarisierungen, die die Schülerinnen und Schüler mit der Sichtweise der Quantenphysik vertraut machen, ohne daß es wegen der Vereinfachungen zu Widersprüchen kommt? In diesem Artikel, der eine Reihe von Aufsätzen zu den Grundlagenproblemen der Quantenmechanik eröffnet, möchten wir begreiflich machen, weshalb wir gezwungen sind, die Quantenmechanik so zu akzeptieren „wie sie ist“. Wir wollen in der historischen Perspektive nachzeichnen, wie sich einfachere Modelle zur Beschreibung atomarer Phänomene als unzureichend erwiesen haben und weshalb für ihre Entdecker die Bedrängnis entstand, vom Anschaulichen immer weiter ins Abstrakte fortzuschreiten. Ein diesen Ausführungen folgender, historisierender Unterrichtsgang wird den Schülern plausibel vermitteln können, warum sie eine solche, sich gegen das Verständnis sträubende Theorie annehmen sollen. In den Folgebeiträgen werden wir uns vertieft einzelnen, didaktisch relevanten Fragestellungen zuwenden (Heisenbergsche Unschärferelationen, quantenmechanisches Meßproblem, Interpretationen der Quantentheorie usw.).

Die Unzulänglichkeit der klassischen Physik

Rekapitulieren wir zunächst die Gründe, die zur schrittweisen Abkehr von der klassischen Physik geführt haben. Das auslösende Moment war der experimentelle Befund, daß die Spektren der Atome aus diskreten Linien bestehen. Die ersten Versuche, diese Gegebenheit zu erklären, bewegten sich natürlich im Rahmen der wohletablierten Newtonschen Theorie (ergänzt um die Maxwellsche Elektrodynamik). Thomsons Atommodell [2] etwa, bei dem die Elektronen innerhalb einer homogen positiv geladenen Kugel quasi-elastisch oszillieren, ist ein elegantes Beispiel für einen solchen Ansatz. Es führt zu monochromatischen Spektrallinien und ist stabil (s. Anhang I). Es wurde jedoch durch die Rutherford'schen Streuversuche in ernste Schwierigkeiten

gebracht, da es die gelegentlich auftretende Rückwärtsstreuung von eingestrahlenen α -Teilchen nicht erklären konnte. Trug man diesen Experimenten Rechnung und führte, wie Rutherford 1911 in seinem wohlbekannten Modell, einen positiv geladenen Kern ein, der von Elektronen umkreist wird, sah man sich mit dem Stabilitätsproblem konfrontiert, das letztlich für den Untergang der klassischen Atommodelle verantwortlich war. Es geht dabei um folgendes: Um an den Kern gebunden zu sein, müssen die Elektronen sich zwangsläufig beschleunigt bewegen (s. Anhang II). Nach den Gesetzen der klassischen Elektrodynamik strahlen beschleunigte Ladungen elektromagnetische Wellen ab. Die von ihnen weggetragene Energie vermindert die kinetische Energie des Elektrons und es stürzt auf Spiralbahnen in den Atomkern (vgl. Anhang III).

Das Bohrsche Atommodell

Man kann nicht sagen, daß Bohr [3] mit seinem Atommodell das Stabilitätsproblem löste. Eher beseitigte er es in einem Handstreich: Er postulierte, daß sich das Elektron im Rutherfordschen Modell nur auf bestimmten diskreten Bahnen bewegen kann, die stationär genannt werden. Auf diesen stationären Bahnen strahlt das Elektron keine Energie ab. Ihre Auszeichnung erfolgt mit Hilfe der Planckschen Konstante h , die damit ihren Weg in die Atomphysik gefunden hatte. Die Erfolge des Bohrschen Modells sind bekannt: Zusammen mit der Frequenzbedingung liefert die Existenz der stationären Bahnen eine Erklärung für die diskrete Natur der Spektrallinien. Für das Wasserstoff-Atom wird das Spektrum quantitativ richtig vorhergesagt und die Rydberg-Konstante aus den fundamentalen Größen e , m_e und h berechnet. Schließlich besitzt das Modell eine inhärente Längenskala für den Radius der Atombahnen, den Bohrschen Radius $h^2\epsilon_0/(\pi m_e e^2)$.

Heutzutage, wo das Bohrsche Modell in eher qualitativer Weise als eine naive Veranschaulichung der Verhältnisse im Atom gelehrt wird, muß man sich erst klar machen, welchen revolutionären Schritt seine Einführung im Jahr 1913 bedeutete. Zum ersten Mal (nach Einsteins Deutung des Photoeffektes) wurde die universelle Gültigkeit der Gesetze der klassischen Physik in Frage gestellt. Die Bohrschen Postulate werden ad hoc eingeführt, es wird nicht versucht, sie aus einer zugrundeliegenden dynamischen Theorie herzuleiten, „weil das hoffnungslos erscheint“ [3]. Ein solches Vorgehen kann sich natürlich nur durch seinen Erfolg legitimieren, und wegen ihm wurde das Bohrsche Modell auch von den Zeitgenossen allgemein beifällig aufgenommen.

Trotz seines unzweifelhaft umwälzenden Charakters besitzt das Bohrsche Atommodell im Vergleich mit der fertig ausgearbeiteten Quantenmechanik eine relativ große Anschaulichkeit. Könnte man letztere in ihrer Abstraktheit nicht der Wissenschaft überlassen und zum Zweck der Lehre die bequeme Bohrsche Atomphysik gebrauchen? Was spricht in Anbetracht ihrer Erfolge überhaupt gegen die Richtigkeit der Theorie?

Zum einen gibt das Modell keineswegs alle Atomspektren richtig wieder. Zwar erlaubt die von Sommerfeld vorgenommene Verfeinerung der Theorie die Erklärung einiger zusätzlicher Phänomene, wie etwa der Feinstruktur, des Stark- und des Zeeman-Effektes. Dies alles gilt aber nur für das Wasserstoff-Atom und die wasserstoffähnlichen Alkalimetalle. Selbst für Helium mit nur zwei Elektronen gelang es trotz intensiver Bemühungen nicht, stationäre Elektronenbahnen zu finden, die das beobachtete Spektrum liefern. Für Atome mit mehr Elektronen ist die Situation noch hoffnungsloser. Das Bohrsche Atommodell scheint die Wirklichkeit also nicht vollständig zu beschreiben.

Ein zweiter Grund für Bedenken liegt jedoch in der schon erwähnten Tatsache, daß die Bohrschen Annahmen nicht aus einer tieferen Theorie abgeleitet werden können, sondern isoliert und unbegründet für sich stehen müssen und nur den Status von Regeln besitzen. Dieser Mangel bleibt auch in der Sommerfeldschen Atomphysik bestehen, wo man wegen der unerklärli-

chen Wichtigkeit der ganzen Zahlen von einer „Zahlenmystik“ sprach. Bohr selbst war sich des „vorläufigen und hypothetischen Charakters“ [3] seines Modells von Anfang an bewußt. Er betrachtete es als ein Durchgangsstadium bis zur Entwicklung einer geschlossenen und konsistenten Theorie. (Eine ausgezeichnete didaktische Analyse des Bohrschen Atommodells hat G. Sauer 1992 veröffentlicht [4]).

Materiewellen: de Broglie und Schrödinger

Ein Ausgangspunkt für die Entwicklung dieser Theorie war die Materiewellentheorie de Broglies. In Analogie zu Einstein, der dem Licht einen Wellen- und einen Teilchenaspekt zugesprochen hatte, postulierte de Broglie [5] eine Welleneigenschaft für Elektronen. Allerdings kann man diese Elektronenwellen nicht unmittelbar anschaulich auffassen; ein höherer Abstraktionsgrad ist erforderlich um ein brauchbares Modell zu erhalten. Bei der de-Broglie-Welle schwingt keine materielle Substanz, sondern man muß sie als „Phasenwelle“ auffassen. Ihr eigenartiger Charakter zeigt sich auch darin, daß ihre Phasengeschwindigkeit c^2/v größer als die Lichtgeschwindigkeit ist, die Teilchengeschwindigkeit ist durch die Gruppengeschwindigkeit v der Phasenwelle bestimmt.

Trotzdem kann man mit de Broglies Materiewellenkonzeption eine unmittelbare Einsicht über die Herkunft der Bohrschen stationären Bahnen im Atom gewinnen: Eine stabile stehende Welle bildet sich durch konstruktive Interferenz gerade dann aus, wenn ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge auf einen Bahnumfang paßt. Setzt man die de-Broglie-Wellenlänge $\lambda = h/(mv)$ ein, ergibt sich gerade das Bohrsche Postulat.

Diese Überlegungen waren unmittelbarer Anknüpfungspunkt für Schrödinger bei der Entwicklung seiner Wellenmechanik. (Natürlich darf hier die Matrizenmechanik von Heisenberg, Born und Jordan nicht unerwähnt bleiben. Mit ihrer positivistischen Grundhaltung entzieht sie sich jedoch von vornherein einer jeden anschaulichen Deutung. Für den Unterricht wird sie in ihrer historischen Form daher kaum in Betracht kommen). Er versuchte, das Modell von de Broglie zu einer dynamischen Theorie auszubauen, indem er nach einer Wellengleichung für die Elektronenwellen suchte. Er ließ sich dabei von der Vorstellung leiten, daß sich die Newtonsche Mechanik aus der Wellenmechanik im Grenzfall unendlich kleiner Wellenlängen ergeben soll, in der gleichen Weise wie die geometrische Optik aus der Wellenoptik. Dabei konnte er auf die Hamiltonsche Formulierung der klassischen Mechanik zurückgreifen, die dieser bereits 1835 in dem Bemühen aufgestellt hatte, die Gesetze von Optik und Mechanik in eine einheitliche Form zu bringen. In dieser Weise wurde Schrödinger auf seine (zeitunabhängige) Wellengleichung geführt [6]:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + (E - U(x))\psi(x) = 0.$$

Sie stellt die endgültige dynamische Gleichung der Theorie dar.

Es stellt sich die Frage, wie diese Gleichung und die in ihr auftretende Wellenfunktion ψ zu deuten sind. Die Tatsache, daß sie für ein Problem mit mehr als einem Elektron eine Funktion aller Elektronen-Ortsvariablen ist, zeigt schon, daß eine so direkte Interpretation wie die der de Broglieschen Materiewellen nicht mehr möglich ist. Außerdem stellte sich heraus, daß eine Wellenmechanik mit rein reellem ψ nicht möglich ist. Da Meßapparate immer nur reelle Zahlen liefern, kann eine komplexe Größe niemals direkt meßbar sein. Eine Interpretation der Wellenfunktion als observable Größe wird so vereitelt. Wie die Begründer der Quantenmechanik müssen wir uns wieder der Notwendigkeit beugen, indem wir eine verhältnismäßig konkrete Deutung als nicht haltbar verwerfen und durch eine abstraktere ersetzen.

Schrödinger fällt die Interpretation seiner Wellenfunktion nicht leicht. Überzeugt davon, daß ψ einer realen Größe in der Natur entspricht, ändert er seine Auffassung von ψ mehrfach, während

er an der Vollendung der Theorie arbeitet. In seiner „Ersten Mitteilung“ zur „Quantisierung als Eigenwertproblem“ [6] enthält er sich noch der Deutung von ψ und deutet nur an, daß man sie sich auf einen „Schwingungsvorgang im Atom“ bezieht, noch in Nachbarschaft zu de Broglie. Am Ende der „Vierten Mitteilung“ dann legt er der Wellenfunktion eine elektromagnetische Deutung bei. Er betrachtet $e\psi^*(x)\psi(x)$, das Betragsquadrat der Wellenfunktion multipliziert mit der Elektronenladung, als die Ladungsdichte am Ort x . Im Falle mehrerer Elektronen ist jeweils ein Elektron herauszugreifen und über die Koordinaten der restlichen zu integrieren. Er variiert diesen Ansatz, indem er schreibt, er sei „gleichbedeutend mit der folgenden Auffassung, welche die eigentliche Bedeutung von ψ besser hervortreten läßt. $\psi\psi^*$ ist eine Art *Gewichtsfunktion* im Konfigurationsraum des Systems. Die *wellenmechanische* Konfiguration ist eine *Superposition* vieler, streng genommen *aller*, kinematisch möglichen punktmechanischen Konfigurationen. Dabei steuert jede punktmechanische Konfiguration mit einem gewissen *Gewicht* zur wahren wellenmechanischen Konfiguration bei, welches Gewicht eben durch $\psi\psi^*$ gegeben ist. Wenn man Paradoxien liebt, kann man sagen, das System befindet sich gleichsam in allen kinematisch denkbaren Lagen gleichzeitig, aber nicht in allen ‘gleich stark’“ [6].

Im Gegensatz zu den vorher besprochenen Modellansätzen haben wir es hier mit einer voll ausgearbeiteten Theorie zu tun, der eine plausible Interpretation gegeben wurde. Die Frage ist nur, ob sich die mit ihrer Hilfe gefundenen Aussagen mit den in der Natur gefundenen Phänomenen vereinbaren lassen. Und hier fällt die Antwort nur teilweise positiv aus. In ihrer oben dargestellten Form ist die Schrödingersche Theorie nämlich eine reine Wellentheorie. Die teilchenhaften Aspekte der Materie, die ja in den Experimenten mit freien Elektronen durchaus dominieren, lassen sich in ihr nicht ohne weiters wiederfinden. Damit verknüpft ist der Umstand, daß man die Vorstellung vom Elektron als einer verschmierten Ladungswolke nicht aufrechterhalten kann. Bei einer Ladungsmessung, die nur in einem Teilbereich des Atoms durchgeführt wird, müßte man sonst Bruchteile der elektrischen Elementarladung nachweisen können. Es ist aber eine grundlegende Erfahrung, daß man in allen Experimenten immer nur ganzzahlige Vielfache von e findet.

Schrödinger war sich dieser Probleme natürlich bewußt. Er versuchte, den Teilchenaspekt der Elektronen durch die Idee zu erklären, daß sie in Wirklichkeit als Wellenpakete aufzufassen sind, die in kleinen Raumregionen lokalisiert sind. Für den speziellen Fall des harmonischen Oszillators konnte er demonstrieren, daß ein solches Wellenpaket im Lauf der Zeit seine Form beibehält. Es wurde jedoch bald klar, daß diese Auffassung nicht den Tatsachen entsprechen kann. Schon Lorentz hatte in einem Brief an Schrödinger seine Bedenken geäußert, und Heisenberg [7] zeigte wenig später, daß der harmonische Oszillator in dieser Beziehung eine Ausnahme darstellt. Im allgemeinen ist die Form von Wellenpaketen nicht stabil und sie zerfließen im Lauf der Zeit. Das bedeutet, es ist nicht möglich, sie mit den experimentell beobachteten Teilchen zu identifizieren. Als Konsequenz müssen wir festhalten, daß eine reine Wellentheorie wie die Schrödingersche als Interpretation der Quantenmechanik aufgegeben werden muß. Der Teilchenaspekt muß sich explizit in der Theorie manifestieren. Diese Einwände gegen eine Materiewelleninterpretation gelten auch für neuere Versuche, die Wellenfunktion für Unterrichtszwecke zu veranschaulichen [8]. Hier wird $|\psi|^2$ als Maß für die Dichte einer konkret-stofflichen Substanz aufgefaßt, dem „Elektronium“. Eine solche Deutung wurde von den Vätern der Quantenmechanik aus guten Gründen fallengelassen.

Die Bornsche Wahrscheinlichkeitsinterpretation

Diese Forderung war auch der unmittelbare Ausgangspunkt für Borns probabilistische Deutung der Wellenfunktion [9]. Angeregt wurde sie durch die Stoßversuche, die Franck und seine Mitarbeiter, ebenfalls in Göttingen, durchgeführt hatten. Born versuchte, mit Hilfe von Schrödingers

Theorie eine Beschreibung der Kollision eines freien Teilchens mit einem Atom zu geben. Im Bemühen, seine Resultate „korpuskular umzudeuten“, sah er nur eine Möglichkeit der Interpretation: die probabilistische. Nach ihr stellt das Betragsquadrat $\psi^*(x)\psi(x)$ der Wellenfunktion die *Wahrscheinlichkeitsdichte* dar, das Elektron am Ort x anzutreffen. Nur auf diese Weise konnte der Dualismus zwischen Welle und Teilchen auf befriedigende Weise überwunden werden. (Es fällt aber trotzdem eine eigenartige Asymmetrie zwischen Welle und Teilchen in dieser Deutung der Quantenmechanik auf: Die dynamische Gleichung ist eine reine Wellengleichung. Der Teilchenaspekt schlägt sich im Formalismus nirgendwo nieder und kommt erst in der Interpretation zum Tragen. Diese Merkwürdigkeit wird erst in der Quantenelektrodynamik aufgelöst, wo Welle und Teilchen symmetrisch behandelt werden). Born faßt den Kernpunkt seiner Resultate in dem folgenden Satz zusammen: „Die Bewegung der Partikel folgt Wahrscheinlichkeitsgesetzen, die Wahrscheinlichkeit selbst aber breitet sich im Einklang mit dem Kausalgesetz aus“ [10].

Daß die Wahrscheinlichkeiten der Bornschen Deutung von denen in der klassischen statistischen Mechanik verschieden sind, wurde schnell deutlich. Überlagert man zwei Wellenfeldern mit Wahrscheinlichkeitsdichten $p_1 = |\psi_1|^2$ und $p_2 = |\psi_2|^2$, so ist die Wahrscheinlichkeitsdichte des überlagerten Feldes $\psi = \psi_1 + \psi_2$ nicht wie in der klassischen Theorie durch $p_1 + p_2$ gegeben, sondern durch $|\psi_1 + \psi_2|^2 = p_1 + p_2 + \psi_1\psi_2^* + \psi_1^*\psi_2$. Die beiden letzten Interferenzterme machen dabei ein wesentliches Element der Theorie aus.

Für praktische Zwecke ist die oben angegebene Formulierung der Wahrscheinlichkeitsinterpretation ausreichend. Über ihre präzise Bedeutung ist allerdings heftig diskutiert worden. Zum Teil ist die Debatte heutzutage noch nicht abgeschlossen. Auf dieses Thema werden wir in einem späteren Beitrag zurückkommen.

Fazit

Wir sind in den vorangegangenen Abschnitten auf der Suche nach einer konsistenten Beschreibung und Interpretation der Quantenphänomene wie auf einer Stufenleiter von anschaulichen Modellen der klassischen Mechanik zur abstrakten Bornschen Wahrscheinlichkeitsinterpretation geführt worden. Der historischen Entwicklung folgend, haben wir uns auf allen Stufen dieser Leiter überzeugt, daß die jeweils einfacheren Anschauungen den Phänomenen nicht in allen Aspekten gerecht zu werden vermögen. Es führt also kein Weg an der Abstraktheit der voll ausgebauten Quantenmechanik mit ihrer Wahrscheinlichkeitsinterpretation vorbei. Man mag das vom didaktischen Standpunkt aus für bedauerlich halten, da die bequemen Wege der Lehre dadurch versperrt sind. Man sollte jedoch nicht vergessen, daß das Ziel der Physik letztlich die Naturerkenntnis ist. Halbherzige Versuche mit begrenzter Tragweite können da nur enttäuschen. Der Vorsatz beim Unterricht der Quantenmechanik muß darin bestehen, bei aller nötigen Vereinfachung die Ideen der Quantentheorie so zu vermitteln, daß die Grundzüge dieses Fundaments der heutigen Naturwissenschaft richtig wiedergegeben werden (konsequente Versuche in dieser Richtung haben Brachner und Fichtner [11, 12] und Wiesner und Engelhardt [13, 14] unternommen). Dies wird von den Schülern aber nur akzeptiert werden, wenn man ein Verständnis für die Notwendigkeit einer solch hochgradigen Abstraktheit herstellen kann. Dann allerdings kann die Einsicht, daß der menschliche Verstand die von der Anschauung gesetzten Grenzen zu überwinden vermag, eine der faszinierendsten Lehren der Quantenmechanik sein

Anhang I: Das Thomsonsche Atommodell

Das Thomsonsche Atommodell [2] besteht aus einer Anzahl von Elektronen, die sich innerhalb einer homogen positiv geladenen Kugel befinden (und sich dort nicht unbedingt bewegen). Thomson nahm an, daß sich die Elektronen in konzentrischen Ringen um den Mittelpunkt

der Kugel anordnen. Die Zahl der Elektronen in den einzelnen Ringen ergibt sich aus Stabilitätsüberlegungen. Sie nimmt von außen nach innen ab (vgl. Abb. 1). Eine Erklärung für die Herkunft der Ladungskugel wird nicht gegeben.

Um zu demonstrieren, daß ein solches System tatsächlich stabil sein kann, betrachten wir den einfachen Fall zweier Elektronen. Wir bezeichnen mit b den Radius der positiven Ladungskugel mit Ladung $2e$ und mit a den Radius des Elektronenrings. Die beiden Elektronen stehen sich also im Abstand $2a$ radial gegenüber. Elektrostatisches Gleichgewicht herrscht dann, wenn sich die beiden Kräfte, die auf eines der Elektronen wirken, gegenseitig aufheben. Das ist einerseits die Coulombkraft zwischen den beiden Elektronen

$$F_1 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0(2a)^2} \quad (1)$$

und andererseits die von der Ladungskugel auf beide Elektronen ausgeübte Kraft. Sie läßt sich berechnen, wenn wir uns das Gaußsche Gesetz zunutze machen: Ähnlich wie beim Newtonschen Gravitationsgesetz erhalten wir die Coulombkraft an der Stelle $r = a$, wenn wir nur den Anteil der positiven Ladung berücksichtigen, der sich innerhalb des Volumens $r < a$ befindet, also $2e a^3/b^3$. Diese Ladung können wir uns als im Ursprung konzentriert vorstellen:

$$F_2 = 2e \frac{a^3}{b^3} \frac{-e}{4\pi\epsilon_0 a^2}. \quad (2)$$

Die Gleichgewichtsbedingung $F_1 + F_2 = 0$ lautet dann $a^3 = b^3/8$ oder

$$a = \frac{1}{2}b. \quad (3)$$

Für das andere Elektron gilt die gleiche Bedingung. Die beiden Elektronen befinden sich also gerade in der Mitte zwischen Ursprung und Rand der Ladungskugel.

Ein Ring kann nur eine begrenzte Zahl von Elektronen aufnehmen, ohne seine Stabilität zu verlieren. Atome mit vielen Elektronen besitzen deshalb mehrere Ringe. Die Verteilung der Elektronen über die Ringe wird folgendermaßen bestimmt: Mit wachsender Elektronenzahl (und Ladungszahl der Kugel) wird zuerst der äußerste Ring aufgefüllt, bis die Konfiguration instabil wird. In diesem Fall erhält der zweitäußerste Ring ein Elektron. Daraufhin ist es möglich, dem äußersten Ring weitere Elektronen hinzuzufügen. Auf solche Weise werden die Elektronen von außen nach innen verteilt.

In diesem Modell untersuchte Thomson die Schwingungen der Elektronen um ihre Gleichgewichtslage, wobei er sowohl Auslenkungen in der Ringebene als auch dazu senkrechte betrachtete. Er fand, daß harmonische Schwingungen mit bestimmten, wohldefinierten Eigenfrequenzen möglich sind, die von der Elektronenzahl abhängen. Wegen der damit verbundenen Emission von monochromatischer Strahlung mit diesen Frequenzen liefert das Thomsonsche Atommodell eine Erklärung für die diskrete Struktur der Atomspektren. Eine quantitative Übereinstimmung ergibt sich jedoch nicht.

Die Elektronenringe können auch als Ganzes rotieren; dann muß die Zentripetalkraft in der Gleichgewichtsbilanz berücksichtigt werden. Aufgrund der emittierten elektromagnetischen Strahlung verlangsamt sich die Kreisbewegung. Die dabei möglicherweise auftretenden Umordnungen der Elektronenkonfiguration können dazu führen, daß das Atom ein Elektron verliert. Dies wird von Thomson als Ursache der Radioaktivität interpretiert.

Anhang II: Statisches Rutherford-Modell

Um die Strahlungsinstabilität des Rutherford-Modells zu umgehen, könnte man auch an ein statisches System von positiven und negativen Punktladungen denken. Daß ein solches Modell nicht stabil ist, soll hier für den Fall zweier Elektronen veranschaulicht werden (vgl. Abb. 2).

Zunächst ist klar, daß alle Ladungen auf einer Geraden liegen müssen, damit sich ihre Coulomb-Kräfte aufheben können. Die Gesamtkraft auf das erste Elektron besteht aus der anziehenden Kraft durch den Kern (Ladung $2e$, Abstand r) und der abstoßenden Kraft des zweiten Elektrons (Abstand l):

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{2e^2}{r^2} + \frac{e^2}{l^2} \right). \quad (4)$$

Damit sie verschwindet, muß $l = r/\sqrt{2}$ gelten. Dann ist aber für das zweite Elektron die Kräftebilanz unausgeglichen:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{2e^2}{(r-l)^2} + \frac{e^2}{l^2} \right) \neq 0. \quad (5)$$

Die Konfiguration ist also unstabil; beide Elektronen stürzen nacheinander in den Kern.

Anhang III: Instabilität des Rutherford'schen Atommodells

Beim Rutherford'schen Atommodell kreisen n Elektronen um einen n -fach positiv geladenen Kern. Da die Strahlungsinstabilität schon für ein einzelnes Elektron auftritt, wollen wir uns auf diesen Fall konzentrieren. Die ungestörte Bewegung des Elektrons unter dem Einfluß der Coulomb-Kraft wird durch die Newtonsche Gleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (6)$$

beschrieben. Da wir eine Kreisbahn betrachten (mit der Kreisfrequenz ω_0 in der xy -Ebene), bleibt $r = |\mathbf{r}|$ konstant. Wir können seinen Wert aus dem Zusammenhang zwischen Coulombkraft und Zentripetalkraft $m\omega_0^2 r$ bestimmen:

$$\frac{1}{r^3} = \frac{4\pi\epsilon_0 m \omega_0^2}{e^2}. \quad (7)$$

Setzen wir das in (6) ein und betrachten die x -Komponente dieser Gleichung, so erhalten wir

$$m\ddot{x} + m\omega_0^2 x = 0. \quad (8)$$

Das ist die Differentialgleichung für eine harmonische Schwingung mit der Frequenz ω_0 . Die gleiche Gleichung gilt für die y -Komponente.

Die Bewegung des Elektrons wird durch (8) allerdings nicht vollständig beschrieben. Der Grund dafür liegt in der Tatsache, daß beschleunigte Ladungen elektromagnetische Wellen abstrahlen. Das gilt auch für Elektronen auf Kreisbahnen. Die abgestrahlte Leistung ist durch die Larmorsche Formel ([15], S. 138) gegeben:

$$P = \frac{e^2 \dot{v}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (9)$$

Nach dem Energiesatz muß mit der Abstrahlung ein Energieverlust des Elektrons verbunden sein. Es erfährt eine abbremsende Kraft, die sogenannte *Strahlungsrückwirkungskraft*. Berechnet man sie aus (9) und setzt sie auf der rechten Seite von (8) ein, so erhält man die *Abraham-Lorentz'sche Bewegungsgleichung* ([15], S. 276)

$$m\ddot{x} + m\omega_0^2 x = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\ddot{x}}. \quad (10)$$

Sie bestimmt die Bewegung des Elektrons unter dem Einfluß der Strahlungsrückwirkung. Wir vermuten, daß die Abweichung von der Kreisbewegung klein bleibt und machen zur Lösung von (10) den Ansatz

$$x(t) = x_0 e^{i\omega_0(1+\delta)t}. \quad (11)$$

Der Realteil von δ beschreibt die Verschiebung der Kreisfrequenz, während sein Imaginärteil die durch die Dämpfung verursachte Abnahme des Bahnradius wiedergibt. Wegen der vermuteten Kleinheit von δ (die wir an unserer Lösung später nachprüfen müssen), vernachlässigen wir beim Einsetzen von (11) in (10) alle quadratischen und höheren Terme in δ . Wir finden als Bestimmungsgleichung für δ :

$$-\omega_0^2(1+2\delta) + \omega_0^2 + \frac{2i}{3c}d\omega_0^3(1+3\delta) = 0, \quad (12)$$

mit der Abkürzung $d = e^2/(4\pi\epsilon_0 mc^2)$. (Das ist der klassische Elektronenradius). Auflösen von (12) nach δ führt zu

$$\delta = \frac{i}{3c}d \frac{\omega_0}{1 - i\omega_0 d/c} \quad (13)$$

Wir können noch einen Schritt weitergehen, indem wir Zahlenwerte für ω_0 und d einsetzen. Für einen Bahnradius von $r = 10^{-10}$ m findet man aus (7) $\omega_0 = 1,6 \cdot 10^{16}$ Hz. Mit $d = 2,8 \cdot 10^{-15}$ m ist $\omega_0 d/c \approx 10^{-7} \ll 1$, so daß wir den entsprechenden Term im Nenner von (13) vernachlässigen können und $\delta = id\omega_0/(3c)$ wird. (Die gleiche Abschätzung bestätigt unsere obige Annahme $\delta \ll 1$). Das Endergebnis für die Bewegung des Elektrons im Rutherford-Atom ist also

$$x(t) = x_0 e^{i\omega_0 t} \exp\left(-\frac{1}{3c}d\omega_0^2 t\right). \quad (14)$$

Der Bahnradius ist nach einer Dämpfungszeit von $(\omega_0^2 d/3c)^{-1} \approx 6 \cdot 10^{-10}$ sec auf $1/e$ -tel seines Anfangswertes abgefallen. Das Elektron stürzt also nach sehr kurzer Zeit auf Spiralbahnen in den Kern. (Allerdings zeigt der Vergleich mit der Umlaufzeit $T = 2\pi/\omega_0$, daß dazu immerhin etwa eine Million Umläufe nötig sind). Das Resultat dieser Rechnung demonstriert die Instabilität des Rutherford'schen Atommodells.

Literatur

- [1] E. Schrödinger, *Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik*, Naturwiss. **23**, 807, 823, 844 (1935).
- [2] J. J. Thomson, *On the structure of the atom*, Philosophical Magazine **7**, 237 (1904).
- [3] N. Bohr, zitiert nach M. Jammer, *The conceptual development of quantum mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [4] G. Sauer, *Didaktische Aspekte der Bohrschen Atomtheorie*, H. Fischler (Hrsg.): *Quantenphysik in der Schule*, IPN Kiel (1992), S. 69.
- [5] L. de Broglie, *Ondes et quanta*, Comptes Rendus **177**, 507 (1923).
- [6] E. Schrödinger, *Quantisierung als Eigenwertproblem*, Ann. d. Phys. **79**, 361, 489 (1926); **80**, 437 (1926); **81**, 109 (1926).
- [7] W. Heisenberg, *Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik*, Z. Phys. **43**, 172 (1927).

- [8] F. Herrmann, M. Laukenmann, *Atomphysik in der Sekundarstufe I*, Physik in der Schule **32**, 718 (1994).
- [9] M. Born, *Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge*, Z. Phys. **37**, 863 (1926).
- [10] M. Born, *Quantenmechanik der Stoßvorgänge*, Z. Phys. **38**, 803 (1926).
- [11] A. Brachner, R. Fichtner, *Quantenmechanik*, Schroedel, Hannover (1980).
- [12] R. Fichtner, *Zu einem grundlegenden Prinzip in der Quantentheorie*, Physik in der Schule **32**, 244 (1994).
- [13] H. Wiesner, P. Engelhard, *Quantenmechanik in Leistungskursen? – Eine Einführung in den Formalismus als Reaktion auf sach- und lehrbedingte Lernschwierigkeiten in Klasse 13*, In: Vorträge des FA Didaktik der DPG Berlin 1992, S. 242.
- [14] H. Wiesner, *Eine Einführung in die Quantentheorie für Leistungsschüler: Konzeption und erste Erfahrungen*, in: H. Fischler (Hrsg.): *Quantenphysik in der Schule*, IPN Kiel (1992), S. 270.
- [15] A. Sommerfeld, *Vorlesungen über Theoretische Physik, Band III: Elektrodynamik*, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt (1977).

Adressen der Autoren

Rainer Müller, Sektion Physik der Universität München, Theresienstr. 37, 80333 München,
 Hartmut Wiesner, Sektion Physik der Universität München, Schellingstr. 4, 80333 München.

Bildbeschriftungen

Abb. 1: Das Thomsonsche Atommodell. Es besteht aus Ringen von Elektronen in einer positiven Ladungskugel, hier für den Fall $n = 13$ dargestellt. Die Elektronenringe können als Ganzes rotieren. Harmonische Schwingungen der Elektronen um ihre Gleichgewichtslage führen zu diskreten Spektrallinien.

Abb. 2: Zur Stabilität eines statischen Systems von Punktladungen.