INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

Klausurvorbereitungsblatt — Bearbeitungszeit: keine Abgabe

1. **Wissensfragen** **(1/4 - 1/3 der Gesamtpunkte)**

   Benennen Sie alle auftretenden Symbole.

   (a) Nennen Sie drei physikalische Phänomene, die im Rahmen der klassischen Physik nicht erklärbar sind.

   (b) Was *besagt* die Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation? (kurze Erläuterung!)

   (c) Geben Sie die Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\theta, \phi)$ bis auf Normierung an.

   (d) Wie lauten die Energien U_n der gebundenen Zustände des Wasserstoffatoms? Geben Sie auch den Entartungsgrad der U_n an.

   (e) Geben Sie die Definition von Auf- und Absteigeoperator sowie die Wirkung auf einen Zustand $|n\rangle$ an.

   (f) Geben Sie den Hamiltonoperator des harmonischen Oszillators in Besetzungszahldarstellung an.

   (g) Wir betrachten eine Observable F. Welche Eigenschaften haben der zugehörige Operator $\hat{F}$ und das Eigenwertproblem von $\hat{F}$?

   (h) Durch welche Bedingung wird der adjungierte Operator $\hat{A}^\dagger$ eines Operators $\hat{A}$ definiert?

   (i) Wie ist ein Projektionsoperator definiert? Leiten Sie daraus die möglichen Eigenwerte eines Projektionsoperators her.

   (j) Skizzieren Sie Idee und Vorgehen bei der stationären Störungstheorie nach Rayleigh-Schrödinger.

2. **Eigenfunktionen des Bahndrehimpulses**

   Wir betrachten den Ortsoperator $\underline{\hat{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$, den Impulsoperator $\underline{\hat{p}} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3)$ sowie den Drehimpulsoperator $\underline{\hat{L}} = (\hat{L}_1, \hat{L}_2, \hat{L}_3)$. Wir definieren die Operatoren

   $$\hat{L}_+ = \hat{L}_1 + i\hat{L}_2 \qquad \text{und} \qquad \hat{L}_- = \hat{L}_1 - i\hat{L}_2 \quad . \tag{1}$$

   Zudem sei die folgende Funktion des Ortes $\underline{r} = (x_1, x_2, x_3)$ gegeben:

   $$\psi(\underline{r}) = (x_1 - ix_2)^3 \, f\left(|\underline{r}|\right) \quad . \tag{2}$$

   Mit f wird eine beliebige (hinreichend oft differenzierbare) Funktion bezeichnet.

   (a) Zeigen Sie, dass $\psi(\underline{r})$ eine Eigenfunktion von $\hat{L}_3$ ist. Wie lautet der zugehörige Eigenwert?

   (b) Wie wirkt der Operator $\hat{L}_-$ auf $\psi(\underline{r})$?

(c) Zeigen Sie damit und unter Verwendung des Ergebnisses von Teilaufgabe (b): $\psi(\underline{r})$ ist auch Eigenfunktion von $\hat{\underline{L}}^2$. Wie lautet der zugehörige Eigenwert?

(d) Geben Sie die zu der angegebenen Funktion $\psi(\underline{r})$ gehörenden Quantenzahlen l und m an.

3. **Operatoren, Kommutatoren, abstrakte Formulierung**

Alle Teilaufgaben können voneinander unabhängig bearbeitet werden.

(a) Es sei $|\alpha\rangle$ ein Eigenzustand des hermiteschen Operators $\hat{A}$. Zudem sei ein beliebiger Operator $\hat{B}$ gegeben. Berechnen Sie den Erwartungswert des Kommutators $[\hat{A}, \hat{B}]$ im Zustand $|\alpha\rangle$.

(b) $\hat{A}$ sei ein hermitescher Operator. Zeigen Sie, dass der Operator

$$\hat{B} = \left(\mathbb{1} - i\hat{A}\right)^{-1}\left(\mathbb{1} + i\hat{A}\right)$$

unitär ist.

(c) Wir betrachten die Bewegung eines Teilchens der Ladung Q und der Masse m in einem konstanten elektrischen Feld $\underline{E} = (E_1, E_2, E_3)$. Im Schrödinger-Bild lautet der Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{3}\hat{p}_i^2 - Q\sum_{i=1}^{3}E_i\hat{x}_i \quad . \tag{3}$$

Stellen Sie für das Heisenberg-Bild die Bewegungsgleichungen für die drei Komponenten des Orts- und des Impulsoperators auf. Bestimmen Sie zudem die Lösungen dieser Bewegungsgleichungen.

(d) Die Eigenwerte des eindimensionalen Hamilton-Operators

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2M} + \hat{V}(\hat{x}) \tag{4}$$

seien durch U_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ gegeben. Die zugehörigen Eigenkets bezeichnen wir mit $|\Phi_n\rangle$. Zeigen Sie:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(U_n - U_0)\,|\langle\Phi_n|\hat{x}|\Phi_0\rangle|^2 = \text{const} \quad . \tag{5}$$

Bestimmen Sie zudem den Wert der Konstanten.

Hinweis: Betrachten Sie den Ausdruck $\left\langle \Phi_m \middle| \left[[\hat{H}, \hat{x}], \hat{x}\right] \middle| \Phi_m \right\rangle$.

4. **Streuung an einer Potentialstufe**

Wir betrachten eine eindimensionale Potentialstufe der Form

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leq 0 \\ V_0 & \text{für} \quad x > 0 \end{cases} \qquad \text{mit} \quad V_0 > 0 \quad . \tag{6}$$

Im folgenden sollen Lösungen der stationären Schrödinger-Gleichung für Energien $U > V_0$ diskutiert werden.

(a) Gesucht ist eine Lösung der stationären Schrödinger-Gleichung, die für $x < 0$ eine (nach rechts) einlaufende und eine reflektierte Welle beschreibt. Für $x > 0$ soll die Lösung eine transmittierte Welle darstellen. Bestimmen Sie den Transmissions- sowie den Reflektionskoeffizienten in Abhängigkeit von U und V_0.

(b) Zeigen Sie zunächst *allgemein*: In einer Dimension ist die Wahrscheinlichkeitsstromdichte j durch

$$j(x) = \mathrm{Re}\left\{\phi^\star(x)\frac{\hat{p}}{m}\phi(x)\right\} \tag{7}$$

gegeben. Mit $\hat{p}$ wird der Impulsoperator bezeichnet; $\phi(x)$ ist eine Lösung der *zeitfreien* Schrödinger-Gleichung.

Berechnen Sie dann die zu den Wellenfunktionen

$$\phi_I(x) = \exp(ikx) \quad , \quad \phi_R(x) = R\exp(-ikx) \quad \text{und} \quad \phi_T(x) = T\exp(iqx) \tag{8}$$

gehörenden Stromdichten j_I, j_R und j_T. Überprüfen Sie die Gültigkeit von

$$j_I + j_R = j_T \quad . \tag{9}$$

(c) Zeigen Sie, dass man im Grenzfall hoher Energien ($U \gg V_0$) die Näherung

$$\left|\frac{j_R}{j_I}\right| \approx \left(\frac{V_0}{4U}\right)^2 \tag{10}$$

erhält.

5. **Eindimensionaler harmonischer Oszillator**

Alle Teilaufgaben können voneinander unabhängig bearbeitet werden.

(a) Betrachten Sie den Grundzustand des Oszillators ($n = 0$). Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen außerhalb des klassisch erlaubten Bereichs anzutreffen, durch

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_1^\infty \mathrm{d}t\, e^{-t^2} \tag{11}$$

gegeben ist. Der Zahlenwert dieses Integrals liegt bei $P \approx 16\%$. Erklären Sie zunächst, was der *klassisch erlaubte Bereich* ist.

(b) Zur Zeit $t = 0$ sei die Wellenfunktion des Oszillators durch

$$\Psi(x, t = 0) = A\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \phi_n(x) \tag{12}$$

gegeben.

i. Bestimmen Sie die (reelle) Normierungskonstante A.

ii. Zeigen Sie, dass $|\Psi(x,t)|^2$ eine Überlagerung zeitlich periodischer Funktionen ist und bestimmen Sie die längste auftretende Periode.

iii. Bestimmen Sie den Erwartungswert der Energie.

Hinweis: Die Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators sind durch

$$\phi_n(x) = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\hbar}} \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-\xi^2/2} (-1)^n e^{\xi^2} d_\xi^n e^{-\xi^2} \quad , \quad \xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \tag{13}$$

gegeben. Beachten Sie außerdem die geometrische Reihe mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad \text{für} \quad |q| < 1 \quad . \tag{14}$$

- Die Klausur findet am Mi., 12. Februar 2014 von 9.30 – 12.30 Uhr in MS 3.1 statt. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.