INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

QUANTENMECHANIK WS 2013/14

2. Übungsblatt Abgabe: Mo., 04.11.2013 bis 17.00 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

4. **Klassische Lebensdauer eines Wasserstoffatoms** **(10 Punkte)**

Im Skript wird diskutiert, das gemäß der klassischen Physik das Elektron eines Wasserstoffatoms auf seiner Bahn Energie abstrahlen würde und somit in den Kern stürzt. Die Zeit, die es dafür benötigt, soll abgeschätzt werden. Wir betrachten also das klassische Modell eines Elektrons, das im Abstand a_0 (Bohrscher Radius) um ein Proton kreist.

(a) Berechnen Sie die Kreisfrequenz für die Bahnbewegung des Elektrons.

(b) Eine beschleunigtes Elektron strahlt gemäß dem Larmorschen Theorem

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -\frac{2}{3}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\underline{x}}^2$$

Energie ab.

Wir nehmen an, dass die charakteristische Zeit, mit der sich das Elektron zum Kern hinbewegt, sehr viel größer ist als die in (a) berechnete Umlaufzeit. Das legt nahe, alle Größen während eines Umlaufs zu mitteln. Weiterhin benötigt man noch den Virialsatz für ein $1/r$-Potential um $\langle U \rangle$ durch das bekannte Coulomb-Potential des Kerns auszudrücken. Die Klammern $\langle\rangle$ bezeichnen die erwähnte Mittelung über einen Umlauf. Auf diese Weise gelangt man über die Bewegungsgleichung zu einer Differentialgleichung für den Kernabstand $a(t)$, aus der sich die Zeit τ ergibt, nach der das Elektron den Kern erreicht. Geben Sie τ an.

(c) Geben Sie weitere Beispiele für physikalische Phänomene an, die im Rahmen der klassischen Physik nicht beschrieben werden können.

5. **Integralsatz von Gauß** **(10 Punkte)**

Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^3$ ein beliebig geformtes Volumen und ∂V dessen Oberfläche. Gegeben sei zudem ein Vektorfeld $\underline{F}(x, y, z)$. Dann besagt der Integralsatz von Gauß:

$$\int_V \operatorname{div} \underline{F}\, \mathrm{d}V = \int_{\partial V} \underline{F} \cdot \mathrm{d}\underline{O} \quad . \tag{1}$$

(a) Im Grundzustand des Wasserstoffatoms wird die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons durch die Funktion

$$\psi(\underline{x}) = N \exp(-\alpha r) \tag{2}$$

mit $r = |\underline{x}|$ beschrieben. Bestimmen Sie die Normierungskonstante N so, dass die Bedingung

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\underline{x})|^2 \, \mathrm{d}V = 1 \tag{3}$$

erfüllt ist.

(b) Es sei $\underline{A} \in \mathbb{R}^3$ konstant und $\psi(x, y, z)$ gegeben durch Gleichung 2. Zeigen Sie

$$\int_V \mathrm{div}\,(\underline{A}\psi)\,\mathrm{d}V = 0 \quad ,$$

indem Sie als Volumen eine Kugel mit Radius R betrachten und anschließend den Grenzübergang $R \to \infty$ durchführen. Machen Sie sich klar, dass dies für alle Funktionen ψ gilt, die Gleichung 3 erfüllen.

(c) Nutzen Sie den Satz von Gauß, um die partielle Integration in mehreren Dimensionen,

$$\int\limits_V \psi \,\mathrm{div}\underline{F}\,\mathrm{d}V = \int\limits_{\partial V} \psi\,\underline{F}\,\mathrm{d}\underline{O} - \int\limits_V \underline{F}\,\mathrm{grad}\,\psi\,\mathrm{d}V \quad , \tag{4}$$

herzuleiten.

(d) Leiten Sie weiterhin die 1. Greensche Integralformel für die skalaren Felder Φ und Ψ her:

$$\int\limits_V \Phi\,\Delta\Psi\,\mathrm{d}V + \int\limits_V \mathrm{grad}\ \Phi\ \mathrm{grad}\ \Psi\,\mathrm{d}V = \int\limits_{\partial V} \Phi\,\mathrm{grad}\ \Psi\,\mathrm{d}\underline{O} \quad . \tag{5}$$

Klausurtermin (vorläufig): 12. Februar 2014 (2. Termin: 19. März 2014)

Teilnahmevoraussetzungen: 50 % der Hausaufgabenpunkte. Zusätzlich muss in den Übungen mindestes einmal eine Aufgabe erfolgreich vorgerechnet werden. Zudem erfolgt ein kurzer Test nach Abschluss von Kapitel IV (voraussichtlich Anfang bis Mitte Dezember, der genaue Termin wird noch bekannt gegeben), der wie ein weiterer Hausaufgabenzettel bewertet wird.

Fragen an:

Hendrik Kriegel	h.kriegel@tu-bs.de	Raum A 317
Tobias Eckhardt	t.eckhardt@tu-bs.de	
Daniel Frombach	d.frombach@tu-bs.de	

Link:

http://www.tu-braunschweig.de/theophys/edu/wise-1314/qm1314