Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

QUANTENMECHANIK WS 2013/14

11. Übungsblatt Abgabe: Mo., 20.01.2014 bis 17.00 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

28. **Pauli-Matrizen** **(10 Punkte)**

Betrachten Sie die Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

(a) Zeigen Sie, dass die Pauli-Matrizen zusammen mit $\sigma_0 = \mathbb{1}$ eine Basis des Raumes der komplexen 2 x 2 - Matrizen bilden. Geben Sie für eine beliebige solche Matrix A die Koeffizienten $x \in \mathbb{C}^4$ an, so dass gilt

$$A = \sum_{j=0}^{3} x_j \sigma_j \quad .$$

(b) Zeigen Sie, dass A genau dann hermitesch ist, wenn $x \in \mathbb{R}^4$ gilt.

(c) Drücken Sie die Eigenwerte von hermiteschem A durch die Komponenten x_i aus.

(d) Zeigen Sie: Ist A eine Dichtematrix, so lässt sie sich durch Vektoren $r \in \mathbb{R}^3$ mit $||r|| \leq 1$, der sogenannten Bloch-Kugel, darstellen.

29. **Besetzungszahldarstellung** **(10 Punkte)**

In dieser Aufgabe sollen einige Eigenschaften der Auf- und Absteigeoperatoren $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$ sowie des Besetzungszahloperators $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ diskutiert werden.

(a) Beweisen Sie die folgenden Kommutatorrelationen für alle $m \in \mathbb{N}$:

i. $\left[\hat{a}^m, \hat{a}^\dagger\right] = m\hat{a}^{m-1}$

ii. $\left[\hat{a}, \left(\hat{a}^\dagger\right)^m\right] = m\left(\hat{a}^\dagger\right)^{m-1}$

iii. $\left[\hat{N}, \hat{a}^m\right] = -m\hat{a}^m$

iv. $\left[\hat{N}, \left(\hat{a}^\dagger\right)^m\right] = m\left(\hat{a}^\dagger\right)^m \quad .$

(b) In der Besetzungszahldarstellung sind die Matrixelemente eines Operators $\hat{A}$ durch $\langle m|\hat{A}|n\rangle$ gegeben. Bestimmen Sie diese Matrixelemente für den Ortsoperator $\hat{x}$, den Impulsoperator $\hat{p}$ sowie für den Hamilton-Operator des eindimensionalen harmonischen Oszillators.

(c) Es sei $\hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$ der Operator der kinetischen und $\hat{V} = \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$ der Operator der potentiellen Energie des eindimensionalen harmonischen Oszillators. Zeigen Sie:

$$\langle n|\hat{T}|n\rangle = \langle n|\hat{V}|n\rangle \quad . \tag{1}$$

Wie ist Gl. (1) zu interpretieren?