


25. Diagonalisierung eines Operators
(8 Punkte)

Gegeben sei ein vollständiges Orthonormalsystem $\{|\phi_n\rangle, n = 1, \dots, N\}$. Wir definieren den Operator

$$\hat{A} = \sum_{n=1}^N |\phi_n\rangle\langle\phi_{n+1}| \quad . \quad (1)$$

Dabei soll $|\phi_{N+1}\rangle := |\phi_1\rangle$ gelten.

- (a) Zeigen Sie zunächst, dass $\hat{A}$ unitär ist.
Wie wirken $\hat{A}$ und $\hat{A}^\dagger$ auf einen Vektor $|\phi_m\rangle$?
- (b) Zeigen Sie, dass $\hat{A}$ und $\hat{A}^\dagger$ dieselben Eigenvektoren besitzen.
- (c) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren von $\hat{A}$ und $\hat{A}^\dagger$.

26. Spur eines Operators
(4 Punkte)

Es sei $\{|\phi_n\rangle, n = 0, 1, 2, \dots\}$ eine Orthonormalbasis des Hilbert-Raums $\mathcal{H}$. Unter der Spur eines Operators $\hat{A}$ verstehen wir den Ausdruck

$$\text{Sp}(\hat{A}) \equiv \sum_n \langle\phi_n|\hat{A}|\phi_n\rangle \quad . \quad (2)$$

- (a) Zeigen Sie: Für zwei Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ gilt

$$\text{Sp}(\hat{A}\hat{B}) = \text{Sp}(\hat{B}\hat{A}) \quad . \quad (3)$$

Folgern Sie daraus: Ist $\hat{U}$ unitär, so gilt

$$\text{Sp}(\hat{A}) = \text{Sp}(\hat{U}\hat{A}\hat{U}^\dagger) \quad . \quad (4)$$

- (b) Zeigen Sie: Für einen Operator $\hat{A}$ gilt

$$\text{Sp}(\hat{A}\hat{A}^\dagger) = \sum_{m,n} \left| \langle\phi_m|\hat{A}|\phi_n\rangle \right|^2 \quad . \quad (5)$$

- (c) Es sei $\{|\mu_n\rangle, n = 0, 1, 2, \dots\}$ eine weitere Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$.
Zeigen Sie: Die Spur eines Operators $\hat{A}$ ist unabhängig von der gewählten Basis, d.h. es gilt

$$\sum_n \langle \phi_n | \hat{A} | \phi_n \rangle = \sum_n \langle \mu_n | \hat{A} | \mu_n \rangle \quad . \quad (6)$$

- (d) Es seien $|a\rangle, |b\rangle \in \mathcal{H}$ zwei beliebige Zustände. Zeigen Sie:

$$\text{Sp} (|a\rangle \langle b|) = \langle b | a \rangle \quad . \quad (7)$$

27. Star Trek - Die Penny-Flip Episode

(8 Punkte)

Das Raumschiff Enterprise befindet sich in einer schier aussichtslosen Lage, als plötzlich "Q" auf der Brücke auftaucht und Hilfe anbietet - vorausgesetzt Captain Picard kann ihn bei folgendem einfachen Spiel schlagen: Q nimmt eine Münze und legt sie mit der 'Kopf'-Seite nach oben in eine Schachtel. Dann greifen Q, Picard und wieder Q (in dieser Reihenfolge) in die Schachtel (ohne hineinzusehen) und drehen die Münze entweder um oder nicht (ohne dass der jeweilige Gegner bemerkt, für welchen Spielzug sie sich entschieden haben). Wenn am Ende wieder 'Kopf' oben liegt hat Q gewonnen, liegt dagegen 'Zahl' oben, gewinnt Picard. Captain Picard erkennt schnell, dass die Chance zu gewinnen 50% beträgt und nimmt die Herausforderung an. Zu seinem großen Ärger muss er allerdings feststellen, dass Q auch bei beliebig häufiger Wiederholung des Spieles immer gewinnt.

- (a) Offensichtlich mogelt Q, aber wie? Nehmen Sie zur Beantwortung dieser Frage an, dass die Münze für Picard (wie für jeden normalen Menschen) klassisch ist, also nur in den Zuständen 'Kopf' (K) oder 'Zahl' (Z) existiert. Für Q dagegen ist die Münze ein Qbit. Das heißt, er kann beliebige Überlagerungen $\psi = \alpha|K\rangle + \beta|Z\rangle$ präparieren. Er ist daher nicht auf die Optionen Flip (F) oder kein Flip (N) beschränkt, sondern kann den Zustand der Münze mit beliebigen unitären 2×2 Matrizen manipulieren. Geben Sie zwei unitäre Matrizen U_1, U_2 an, die Q in seinen Zügen anwenden muss um immer zu gewinnen, unabhängig davon ob Picard F (= Operation σ_1) oder N (=Operation σ_0) wählt.

Hinweis: Wählen Sie den Zustand $\psi = U_1|K\rangle = \alpha|K\rangle + \beta|Z\rangle$ nach Q's erstem Zug so, dass er durch die beiden Operationen N und F nicht verändert wird.

- (b) Nach einiger Zeit ist es Picard schließlich leid von Q genarrt zu werden und er ändert daher die Spielregeln: Nun macht er den ersten und den dritten Zug und Q den zweiten. Ist es Q immer noch möglich zu mogeln? Begründen Sie Ihre Antwort.