


17. Dreidimensionaler, unendlich hoher Potentialkasten (6 Punkte)

Ein Teilchen befinde sich in einem Kasten mit den Ausdehnungen $0 \leq x_1 \leq A$, $0 \leq x_2 \leq B$, $0 \leq x_3 \leq C$. Innerhalb des Kastens sei das Potential $V = 0$; außerhalb gilt $V = \infty$.

- Bestimmen Sie die Eigenfunktionen und Energieniveaus des Teilchens. Verwenden Sie dabei einen geeigneten Separationsansatz für $\phi(x_1, x_2, x_3)$ und greifen Sie auf Ergebnisse aus der Vorlesung zurück.
- Betrachten Sie den Spezialfall $A = B = C$. Geben Sie die Entartung des Grundzustandes an. Schätzen Sie ab, wie viele Zustände N unterhalb einer vorgegebenen Energie U existieren. U sei dabei so groß, dass $N \gg 1$.

18. Drehimpulseigenfunktionen und Orbitale beim H-Atom (4 Punkte)

Eine quantenmechanische Hantel mit zwei Freiheitsgraden, den räumlichen Polarwinkeln θ und φ , sei (zum Zeitpunkt $t = 0$) in einem durch die Wellenfunktion

$$\psi(\theta, \varphi) = \frac{1}{N} (\sin \theta \cos \varphi + 2 \sin \theta \sin \varphi + 2 \cos \theta) \quad (1)$$

beschriebenen Zustand.

- Stellen Sie $\psi(\theta, \varphi)$ als Linearkombination der Kugelflächenfunktionen

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (2)$$

dar. Bestimmen Sie die (reelle) Normierungskonstante N .

Die untersuchten Zustände des H-Atoms mit $l = 1$ entsprechen den bekannten p-Orbitalen, wobei nun die diversen Normierungskonstanten außer acht gelassen werden sollen.

- Skizzieren/Plotten Sie die Winkelabhängigkeit von $|\Psi|^2$, die zu $p_z = Y_1^0(\vartheta, \varphi)$ und $p_{\pm} = Y_1^{\pm 1}(\vartheta, \varphi)$ gehört.
- Überlegen Sie, wie die Funktionen $p_x(\vartheta, \varphi)$ und $p_y(\vartheta, \varphi)$ aussehen müssten, um die bekannte Keulenform in x - bzw. y -Richtung zu erhalten.

Bitte wenden $\longrightarrow$

19. Gebundene Zustände im doppelten Delta-Potential

(10 Punkte)

Wir betrachten die eindimensionale Bewegung eines Teilchens der Masse m in dem Potential

$$V(x) = -V_0 \{ \delta(x-a) + \delta(x+a) \} \quad \text{mit einer Konstanten } V_0 > 0 \quad . \quad (3)$$

Es gilt $a > 0$. Ziel der Aufgabe ist das Lösen der stationären Schrödinger-Gleichung für negative Energien $U < 0$.

(a) Die Lösungen der Schrödinger-Gleichung für dieses Problem lassen sich wie folgt klassifizieren:

- Symmetrische Lösungen $\phi_S(x)$: Es gilt $\phi_S(-x) = \phi_S(x)$.
- Antisymmetrische Lösungen $\phi_A(x)$: Es gilt $\phi_A(-x) = -\phi_A(x)$.

Zudem führen wir den Parameter

$$k = \sqrt{\frac{-2mU}{\hbar^2}} \in \mathbb{R} \quad (4)$$

ein. Geben Sie geeignete Ansätze für die Lösungen $\phi_S(x)$ und $\phi_A(x)$ an. Eine Normierung der Lösungen ist *nicht* verlangt.

Zeigen Sie außerdem: Der zu einer symmetrischen Lösung $\phi_S(x)$ gehörende Wert von k genügt der Gleichung

$$\exp(-2ka) = \frac{\hbar^2}{mV_0} k - 1 \quad . \quad (5)$$

Der zu einer antisymmetrischen Lösung $\phi_A(x)$ gehörende Wert von k genügt der Gleichung

$$-\exp(-2ka) = \frac{\hbar^2}{mV_0} k - 1 \quad . \quad (6)$$

(b) Diskutieren Sie anhand einer graphischen Lösung der Gleichungen (5) und (6), ob zu jedem Wert von $U < 0$ sowohl eine symmetrische Lösung $\phi_S(x)$ als auch eine antisymmetrische Lösung $\phi_A(x)$ existiert.