



15. Stationäre Schrödingergleichung

(8 Punkte)

Das Lösen der stationären (zeitfreien) Schrödingergleichung

$$\hat{H}\phi_n(\underline{x}) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_{\underline{x}}^2 + \hat{V}(\underline{x}) \right) \phi_n(\underline{x}) = U_n\phi_n(\underline{x}) \quad , \quad (1)$$

d.h. das Bestimmen der U_n (Eigenwerte) und der $\phi_n(x)$ (Eigenfunktionen), ist eine der Hauptaufgaben in der Quantenmechanik. In 1D lässt sich das Problem z.B. für stückweise konstante Potentiale (Potentialkästen oder Potentialbarrieren)

$$\hat{V}(x) = V_{0,ij} \quad ; \quad x_i < x < x_j$$

oder für δ -Potentiale

$$\hat{V}(x) = V_0 \delta(x - x_i)$$

analytisch gut bearbeiten.

- (a) Sei nun $\hat{V}(x) = V_0 = \text{const}$. Lösen Sie die zeitfreie Schrödingergleichung allgemein für $V_0 < U$ sowie für $V_0 > U$. Geben Sie jeweils mindestens zwei verschiedene Darstellungen der Lösungen an.
- (b) Was zeichnet die vier Wellenfunktionen aus (a) im Hinblick auf die Lösung des Potentialproblems jeweils aus, d.h. welche Vorteile haben die einzelnen Darstellungen der Lösungen?
- (c) Geben Sie eine normierbare Lösung für den Fall $V_0 > U$ an.
- (d) Skizzieren Sie $|\phi(x)|^2$ für die beiden verschiedenen Lösungstypen.

Bemerkung: Normierbare Lösungen werden auch als gebundene Zustände bezeichnet. Im Fall $V_0 < U$ treten jedoch Lösungen auf, die im bisherigen Sinn nicht normierbar sind. Für weitere Details sei hier auf die Diskussion dieser Lösungen im Rahmen des Wasserstoffatoms verwiesen.

Bitte wenden →

16. Endlich hoher Potentialkasten I: Gebundene Zustände

(12 Punkte)

Gegeben sei das Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -l \quad \text{(I)} \\ -V_0 & \text{für } -l \leq x \leq l \quad \text{(II)} \\ 0 & \text{für } l < x \quad \text{(III)} \end{cases}, \quad V_0 > 0 \quad .$$

Es sollen einige Eigenschaften der Lösungen der eindimensionalen, stationären Schrödinger-Gleichung für $-V_0 < U < 0$ diskutiert werden. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

- (a) Berücksichtigen Sie Ihre Ergebnisse aus Aufgabe 15 und geben Sie jeweils geeignete allgemeine Lösungen für die Bereiche (I)-(III) an. Verwenden Sie dabei die Abkürzungen

$$q = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(U + V_0)} \quad k = \sqrt{\frac{-2mU}{\hbar^2}} \quad .$$

- (b) In der Vorlesung wurden Übergangsbedingungen für die Wellenfunktion $\phi(x)$ an Potentialsprüngen diskutiert. Verwenden Sie diese um ein Gleichungssystem für die Konstanten in den allgemeinen Lösungen aus (a) aufzustellen.
- (c) Es sollen nun die nichttrivialen Lösungen dieses Gleichungssystems bestimmt werden. Zeigen Sie, dass für die symmetrischen Lösungen

$$k = q \tan(ql)$$

und für die antisymmetrischen Lösungen

$$k = -q \cot(ql)$$

gelten muss. Zeigen Sie, dass außerdem gilt:

$$q^2 + k^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2} \quad .$$

- (d) Die obigen Bedingungen liefern im Prinzip die Lösungen für die Energieeigenwerte U_n . Jedoch sind die Gleichungen transzendent. Man kann aber einige Eigenschaften aus einer graphischen Lösung ablesen. Begründen Sie mittels dieser graphischen Lösung:
- Es gibt immer mindestens einen und höchstens endlich viele diskrete Energieeigenwerte.
 - Der Zustand mit der niedrigsten Energie ist symmetrisch.
 - Die folgenden Zustände sind immer abwechselnd antisymmetrisch und symmetrisch.