

**12. Poisson-Klammern****(5 Punkte)**

Es seien $A = A(\underline{q}, \underline{p}, t)$ und $B = B(\underline{q}, \underline{p}, t)$ zwei Funktionen der generalisierten Koordinaten $\underline{q} = (q_1, \dots, q_f)$, der generalisierten Impulse $\underline{p} = (p_1, \dots, p_f)$ und der Zeit. Dann ist die Poisson-Klammer $\{A, B\}$ von A und B durch

$$\{A, B\} = \sum_{\beta=1}^f \left(\frac{\partial A}{\partial q_{\beta}} \frac{\partial B}{\partial p_{\beta}} - \frac{\partial A}{\partial p_{\beta}} \frac{\partial B}{\partial q_{\beta}} \right) \quad (1)$$

definiert.

- (a) Zeigen Sie, daß sich die kanonischen Bewegungsgleichungen in der Form

$$\dot{q}_{\alpha} = \{q_{\alpha}, H\} \quad \text{und} \quad \dot{p}_{\alpha} = \{p_{\alpha}, H\} \quad (2)$$

schreiben lassen. Mit H wird die Hamilton-Funktion bezeichnet.

- (b) Es sei $\underline{L} = (L_1, L_2, L_3)$ der dreidimensionale Drehimpulsvektor, (q_1, q_2, q_3) der kartesische Ortsvektor und (p_1, p_2, p_3) der kanonisch konjugierte Impulsvektor. Zeigen Sie die folgende Beziehung für die Poisson-Klammern:

$$\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k$$

13. Kommutatoren**(10 Punkte)**

In dieser Aufgabe soll das Rechnen mit Kommutatoren geübt werden.

- (a) Zeigen Sie: Für beliebige Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$ und $\hat{C}$ gilt

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] \quad . \quad (3)$$

- (b) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: Für beliebige Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$ und $n = 1, 2, \dots$ gilt

$$[\hat{A}, \hat{B}^n] = \sum_{r=0}^{n-1} \hat{B}^r [\hat{A}, \hat{B}] \hat{B}^{n-r-1} \quad . \quad (4)$$

- (c) Sei $\hat{A}$ nun eine Potenzreihe in $\hat{q}_k$ und $\hat{p}_k$. Zeigen Sie unter Verwendung von (b)

$$[\hat{p}_k, \hat{A}] = -i\hbar \partial_{q_k} \hat{A} \quad \text{und} \quad [\hat{q}_k, \hat{A}] = i\hbar \partial_{p_k} \hat{A} \quad . \quad (5)$$

Bitte wenden $\longrightarrow$

- (d) Berechnen Sie für die Komponenten des Drehimpulsoperators $\hat{\underline{L}} = \hat{\underline{q}} \times \hat{\underline{p}}$ die folgenden Kommutatoren ($i, j \in \{1, 2, 3\}$):

i. $[\hat{L}_i, \hat{L}_j]$ ii. $[\hat{L}_i, \hat{L}^2]$

Hinweis: Bei dieser Teilaufgabe können Sie durch Verwendung von Komponentenschreibweise und Summenkonvention *sehr, sehr* viel Schreibarbeit sparen.

14. Die Matrix-Exponentialfunktion

(5 Punkte)

Für eine quadratische Matrix $\underline{\underline{A}}$ definieren wir den Ausdruck $\exp(\underline{\underline{A}})$ als Potenzreihe:

$$\exp(\underline{\underline{A}}) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underline{\underline{A}}^k \quad . \quad (6)$$

- (a) Zeigen Sie: Vertauschen die beiden Matrizen $\underline{\underline{A}}$ und $\underline{\underline{B}}$ miteinander, d.h. ist $[\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}] = 0$, so gilt das Additionstheorem

$$\exp(\underline{\underline{A}}) \cdot \exp(\underline{\underline{B}}) = \exp(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) \quad . \quad (7)$$

- (b) Wir betrachten eine spurfreie Matrix $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Dann ist $\underline{\underline{A}}$ diagonalisierbar, d.h. es existiert eine invertierbare Matrix $\underline{\underline{S}} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, so dass

$$\underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{D}} \quad (8)$$

eine Diagonalmatrix ist. Zeigen Sie zunächst:

$$\exp(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{S}} \cdot \exp(\underline{\underline{D}}) \cdot \underline{\underline{S}}^{-1} \quad . \quad (9)$$

Überlegen Sie sich dann, wie man $\exp(\underline{\underline{D}})$ für Diagonalmatrizen $\underline{\underline{D}}$ berechnet.

- (c) Das Ergebnis aus 14b lässt sich auch auf eine allgemeine 2×2 -Matrix $\underline{\underline{B}}$ übertragen. Berechnen Sie $\exp(\underline{\underline{B}})$ indem Sie $\underline{\underline{B}}$ als

$$\underline{\underline{B}} = \xi \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{A}}_0 \quad (10)$$

schreiben, wobei $\xi \in \mathbb{R}$ und $\underline{\underline{A}}_0$ eine spurfreie Matrix ist.