


9. Welle-Teilchen-Dualismus I: Klassische Mechanik
(7 Punkte)

In dieser Aufgabe werden wir zeigen, dass die Hamilton-Jacobi-Gleichung der klassischen Mechanik bereits Hinweise auf den Welle-Teilchen-Dualismus enthält. Wir betrachten dazu ein System aus einem Teilchen.

- (a) Die Hamiltonfunktion sei nicht explizit zeitabhängig. Zeigen Sie, dass der Separationsansatz

$$S(q_k, t) = W(q_k) - \beta t$$

für die Wirkungskfunktion S auf $\beta = U$ führt (U bezeichnet hierbei die Gesamtenergie des Systems).

- (b) Wie lässt sich $S = \text{const}$ interpretieren?
 (c) Bilden Sie das totale Differential von S und zeigen Sie, dass eine charakteristische Geschwindigkeit

$$v_S = \frac{U}{|\partial_x W|}$$

auftritt.

- (d) Betrachten Sie den Fall, dass sich ein Teilchen im Potential V bewegt und bestimmen Sie v_S sowie die Teilchengeschwindigkeit v_T in Abhängigkeit von U und V .

Bemerkung: Im Wellenbild würde man diese beiden Geschwindigkeiten mit Phasen- und Gruppengeschwindigkeit identifizieren.

10. Welle-Teilchen-Dualismus II: Wellenpaket
(10 Punkte)

Wir wollen versuchen ein Teilchen mittels des eindimensionalen Wellenpakets

$$\Psi(x, t) = \int dk A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)}$$

zu beschreiben. Dieses Paket besteht aus einer Trägerwelle, die sich mit der Phasengeschwindigkeit $v_{ph} = \omega/k$ bewegt und einer Amplitude, die die Trägerwelle moduliert und damit die räumliche Lokalisierung des Wellenpakets beschreibt. Die Einhüllende A bewegt sich mit der Gruppengeschwindigkeit $v_G = \partial_k \omega$.

Bitte wenden →

- (a) Stellen Sie eine Verbindung zu den Geschwindigkeiten aus Aufgabe 9 her und bestimmen Sie damit die Dispersionsrelation $\omega(k)$ für kräftefreie Materiewellen. Leiten Sie außerdem die de Broglie-Beziehung $p = \hbar k$ her.
- (b) Zeigen Sie, daß es physikalisch wenig sinnvoll ist, eine Gewehr­kugel mit der Masse 4.2 g, die sich mit 137 m/s bewegt, als Materiewelle zu bezeichnen.
- (c) Das Wellenpaket soll nun mit der Schrödingergleichung verknüpft werden. Zeigen Sie dazu, unter welcher Bedingung an $\omega(k)$ das Wellenpaket $\Psi(x, t)$ die Schrödingergleichung für ein freies Teilchen erfüllt?
- (d) Was ändert sich, wenn man das Teilchen durch eine ebene Welle beschreibt?

11. Quantenmechanik auf der Insel Φ marn

(3 Punkte)

Die Bewohner der Insel Φ marn verweigern die Akzeptanz der Quantentheorie, da für sie jedes Φ eine reelle Sache ist und sie eine Wissenschaft von Imaginärteilen der Welt strikt ablehnen! Können Sie Ihnen helfen und damit die Akzeptanz moderner Wissenschaft auf der Insel Φ marn verbessern?

- (a) Schreiben Sie für die Wellenfunktion explizit $\Phi + i\Psi$, wobei Φ und Ψ jetzt reellwertig sind. Setzen Sie diesen Ansatz in die (zeitabhängige) Schrödingergleichung ein. Trennen Sie diese in (je eine Gleichung für) Real- und Imaginärteil.
- (b) Gewinnen Sie daraus durch Einsetzen eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Zeit für Φ . Diese ist die Schrödingergleichung wie sie den Bewohnern von Φ marn nahegebracht werden soll.
- (c) Eine kritische Frage des Bürgermeisters von Φ marn ist, ob weiterhin die von Herrn James Clerk Maxwell (dem Herrn aus Schottland, der sie vor anderthalb Jahrhunderten besucht hat) beschriebenen ebenen Wellen – die seitdem nichts Böses auf der Insel angerichtet haben – diese auch nach der neuen Theorie weiter ungehindert passieren können. Nehmen Sie hierzu (1D) den Ansatz $\Phi = \sin(kx - \omega t)$ und zeigen Sie dass – wenn die Bewohner keine Potentialberge und Abschirmanlagen errichten, also für $V(x) = 0$ sorgen – solche Wellen die Insel auch weiterhin ohne Schaden passieren können.