Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

QUANTENMECHANIK WS 2013/14

3. Übungsblatt Abgabe: Mo., 11.11.2011 bis 17.00 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

6. **Diracsche δ-Funktion** **(5 Punkte)**

Wir betrachten die Abbildung δ_{x_0}, die auf (stetige) reelle Funktionen f einer reellen Variablen wie folgt wirkt:

$$\delta_{x_0}[f] := f(x_0).$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$d_l(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}l}\exp(-x^2/(2l^2))$$

normiert sind (d.h., $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, d_l(x) = 1$) und berechnen Sie das Faltungsintegral

$$d_l[f] := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, d_l(x - x_0) f(x) \quad ,$$

wobei f eine beliebige, reelle Testfunktion ist. Was erhalten Sie im Grenzfall $\lim_{l\to 0} d_l[f]$? Skizzieren Sie $d_l(x)$ für $l = 1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots$.
Hinweis: Verwenden Sie den Mittelwertsatz der Integralrechnung.

(b) Für die Diracsche δ-Funktion wird üblicherweise die Schreibweise

$$\delta_{x_0}[f] := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta(x - x_0) f(x)$$

verwendet. In drei Dimensionen definieren wir die δ-Funktion über:

$$\delta(\underline{r}) := \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3) \quad ; \quad \underline{r} = (x_1, x_2, x_3) \quad .$$

Berechnen Sie:

i. $\int \mathrm{d}V\, \underline{r}\, \rho(\underline{r})$ mit $\rho(\underline{r}) = \sum_{i=1}^{N} \delta(\underline{r} - \underline{r}_i)\,;\ V = \mathbb{R}^3$.

ii. $\int \mathrm{d}V\, e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}\, \delta(\underline{r})\,;\ V = \mathbb{R}^3$ (Fouriertransformation der δ-Funktion).

7. **Fourier-Transformation** **(11 Punkte)**

Die Fourier-Transformation $\hat{f}$ einer Funktion f ist in s Dimensionen definiert als

$$\hat{f}(\underline{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{s/2}} \int \mathrm{d}^s x\, f(\underline{x})\, \mathrm{e}^{-i\underline{k}\cdot\underline{x}} \quad .$$

(a) Sukzessives Anwenden von Fouriertransformation und Rücktransformation auf $f(x)$ sollte wieder auf $f(x)$ führen. Überprüfen Sie diese Aussage.

Bitte wenden $\longrightarrow$

(b) Die Lösungen der dreidimensionalen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}(\underline{x}, t) = c^2\, \partial_{\underline{x}}^2 \Psi(\underline{x}, t) \tag{1}$$

können als Fourier-Integral dargestellt werden:

$$\Psi(\underline{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \mathrm{d}^3k\, \hat{\Psi}(\underline{k}, t)\, \mathrm{e}^{i\underline{k}\cdot\underline{x}} \quad . \tag{2}$$

Welche gewöhnliche Differentialgleichung erfüllt $\hat{\Psi}(\underline{k}, t)$ für festes $\underline{k}$? Geben Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung an.

(c) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\hat{\Psi}(\underline{k})$ einer Gauß-Verteilung

$$\Psi\,(x) = \Psi_0\, \mathrm{e}^{-\alpha x^2/2} \quad . \tag{3}$$

8. **Separationsansatz** **(4 Punkte)**

Nehmen Sie an, dass sich die Lösung $\Psi(x, t)$ der eindimensionalen Wellengleichung

$$\partial_t^2 \Psi(x, t) = c^2 \partial_x^2 \Psi(x, t) \tag{4}$$

darstellen lässt als

$$\Psi(x, t) = f(x)\, g(t) \quad . \tag{5}$$

Geben Sie die allgemeine Lösung für $\Psi(x, t)$ an.