



33. Pauli-Matrizen

(10 Punkte)

Betrachten Sie die Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Pauli-Matrizen zusammen mit $\sigma_0 = \mathbf{1}$ eine Basis des Raumes der komplexen 2×2 -Matrizen bilden. Geben Sie für eine beliebige solche Matrix A die Koeffizienten $x \in \mathbb{C}^4$ an, so dass gilt

$$A = \sum_{j=0}^3 x_j \sigma_j.$$

- (b) Zeigen Sie, dass A genau dann hermitesch ist, wenn $x \in \mathbb{R}^4$ gilt.
(c) Drücken Sie die Eigenwerte von hermiteschem A durch die Komponenten x_i aus.
(d) Zeigen Sie: Ist A eine Dichtematrix, so lässt sie sich durch Vektoren $r \in \mathbb{R}^3$ mit $\|r\| \leq 1$, der sogenannten Bloch-Kugel, darstellen.

34. Star Trek - Die Penny-Flip Episode

(10 Punkte)

Das Raumschiff Enterprise befindet sich in einer schier aussichtslosen Lage, als plötzlich "Q" auf der Brücke auftaucht und Hilfe anbietet - vorausgesetzt Captain Picard kann ihn bei folgendem einfachen Spiel schlagen: Q nimmt eine Münze und legt sie mit der 'Kopf'-Seite nach oben in eine Schachtel. Dann greifen Q, Picard und wieder Q (in dieser Reihenfolge) in die Schachtel (ohne hineinzusehen) und drehen die Münze entweder um oder nicht (ohne dass der jeweilige Gegner bemerkt, für welchen Spielzug sie sich entscheiden haben). Wenn am Ende wieder 'Kopf' oben liegt hat Q gewonnen, liegt dagegen 'Zahl' oben, gewinnt Picard. Captain Picard erkennt schnell, dass die Chance zu gewinnen 50% beträgt und nimmt die Herausforderung an. Zu seinem großen Ärger muss er allerdings feststellen, dass Q auch bei beliebig häufiger Wiederholung des Spieles immer gewinnt.

- (a) Offensichtlich mogelt Q, aber wie? Nehmen Sie zur Beantwortung dieser Frage an, dass die Münze für Picard (wie für jeden normalen Menschen) klassisch ist, also nur in den Zuständen 'Kopf' (K) oder 'Zahl' (Z) existiert. Für Q dagegen ist die Münze ein Qbit. Das heißt, er kann beliebige Überlagerungen $\psi = \alpha|K\rangle + \beta|Z\rangle$ präparieren. Er ist daher nicht auf die Optionen Flip (F) oder kein Flip (N) beschränkt, sondern kann den Zustand der Münze mit beliebigen unitären 2×2 Matrizen manipulieren. Geben Sie zwei unitäre Matrizen U_1, U_2 an, die Q in seinen Zügen anwenden muss

um immer zu gewinnen, unabhängig davon ob Picard F (= Operation σ_1) oder N (=Operation σ_0) wählt.

Hinweis: Wählen Sie den Zustand $\psi = U_1|K\rangle = \alpha|K\rangle + \beta|Z\rangle$ nach Q's erstem Zug so, dass er durch die beiden Operationen N und F nicht verändert wird.

- (b) Nach einiger Zeit ist es Picard schließlich leid von Q genarrt zu werden und er ändert daher die Spielregeln: Nun macht er den ersten und den dritten Zug und Q den zweiten. Ist es Q immer noch möglich zu mogeln? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Dies ist das letzte Übungsblatt, auf das es Punkte gibt und das korrigiert wird. Nächste Woche gibt es an dieser Stelle dann ein Klausurvorbereitungsblatt.