INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

Quantenmechanik I — WiSe 2006/2007

13. Übungsblatt — Abgabe: Donnerstag, 01.02.07 (bis 9.40 Uhr) im Kasten bei A316/A317

**Fragen zu den Übungsaufgaben:** S. Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de

39. **Besetzungszahldarstellung** **(18 Punkte)**

In dieser Aufgabe sollen einige Eigenschaften der Auf- und Absteigeoperatoren $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$ sowie des Besetzungszahloperators $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ diskutiert werden.

(a) Beweisen Sie die folgenden Kommutatorrelationen für alle $m \in \mathbb{N}$:

i. $\left[\hat{a}^m, \hat{a}^\dagger\right] = m\hat{a}^{m-1}$

ii. $\left[\hat{a}, \left(\hat{a}^\dagger\right)^m\right] = m\left(\hat{a}^\dagger\right)^{m-1}$

iii. $\left[\hat{N}, \hat{a}^m\right] = -m\hat{a}^m$

iv. $\left[\hat{N}, \left(\hat{a}^\dagger\right)^m\right] = m\left(\hat{a}^\dagger\right)^m$ .

(b) Der Zustand $|0\rangle$ sei normiert. Weisen Sie nach, daß die über

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

rekursiv definierten Vektoren ebenfalls alle normiert sind.

(c) In der Besetzungszahldarstellung sind die Matrixelemente eines Operators $\hat{A}$ durch $\langle n'|\hat{A}|n\rangle$ gegeben. Bestimmen Sie diese Matrixelemente für den Ortsoperator $\hat{x}$, den Impulsoperator $\hat{p}$ sowie für den Hamilton-Operator des eindimensionalen harmonischen Oszillators.

(d) Verifizieren Sie mittels der in Teilaufgabe (c) aufgestellten Matrizen für $\hat{x}$ und $\hat{p}$ die Beziehung

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar\hat{I} \quad .$$

(e) Zeigen Sie:

$$\left[\hat{a}, \mathrm{e}^{\lambda\hat{a}^\dagger}\right] = \lambda\,\mathrm{e}^{\lambda\hat{a}^\dagger} \qquad \text{mit} \qquad \lambda \in \mathbb{C} \quad .$$

(f) Es sei nun $|\lambda\rangle$ der folgende Zustand:

$$|\lambda\rangle = C_\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda\hat{a}^\dagger}\,|0\rangle$$

mit $\lambda \in \mathbb{C}$ und $C_\lambda \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

$$\frac{\langle\lambda|\,\hat{p}\,|\lambda\rangle}{\langle\lambda|\lambda\rangle} = \sqrt{2\hbar m\omega}\,\mathrm{Im}\,\lambda \qquad \text{und} \qquad \frac{\langle\lambda|\,\hat{x}\,|\lambda\rangle}{\langle\lambda|\lambda\rangle} = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\,\mathrm{Re}\,\lambda \quad .$$

40. **Dyadische Produkte** **(12 Punkte)**

Gegeben sei ein vollständiges Orthonormalsystem $\{|\phi_n\rangle, n = 1, \ldots, N\}$. Wir definieren den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \alpha \sum_{n=1}^{N} |\phi_n\rangle\langle\phi_n| + \beta \sum_{n=1}^{N} \{\,|\phi_n\rangle\langle\phi_{n+1}| + |\phi_{n+1}\rangle\langle\phi_n|\,\} \quad .$$

Dabei soll $|\phi_{N+1}\rangle := |\phi_1\rangle$ gelten. Mit $\alpha$ und $\beta$ werden reelle Konstanten bezeichnet. Ziel dieser Aufgabe ist die Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren von $\hat{H}$.
Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Betrachten Sie zunächst den Operator

$$\hat{A} \equiv \sum_{n=1}^{N} |\phi_n\rangle\langle\phi_{n+1}| \quad .$$

Stellen Sie $\hat{H}$ mit Hilfe von $\hat{A}$ und $\hat{A}^\dagger$ dar. Zeigen Sie zudem, daß $\hat{A}$ unitär ist.
Wie wirken $\hat{A}$ und $\hat{A}^\dagger$ auf einen Vektor $|\phi_m\rangle$?

(b) Zeigen Sie, daß $\hat{H}$, $\hat{A}$ und $\hat{A}^\dagger$ dieselben Eigenvektoren besitzen.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren von $\hat{A}$.

(d) Bestimmen Sie aus den Ergebnissen von Teilaufgabe (c) die Eigenwerte von $\hat{H}$.