INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

Quantenmechanik I — WiSe 2006/2007

11. Übungsblatt — Abgabe: Donnerstag, 18.01.07 (bis 9.40 Uhr) im Kasten bei A316/A317

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de

33. **Summenregel** **(5 Punkte)**
Die Eigenwerte des eindimensionalen Hamilton-Operators

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2M} + \hat{V}(\hat{x})$$

seien durch U_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ gegeben. Die zugehörigen Eigenkets bezeichnen wir mit $|\Phi_n\rangle$. Zeigen Sie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (U_n - U_0) \left|\langle \Phi_n | \hat{x} | \Phi_0 \rangle\right|^2 = \text{const} \quad .$$

Bestimmen Sie zudem den Wert der Konstanten.

Hinweis: Betrachten Sie den Ausdruck $\left\langle \Phi_m \middle| \left[[\hat{H}, \hat{x}], \hat{x}\right] \middle| \Phi_m \right\rangle$.

34. **Dichteoperator** **(3 Punkte)**
Es sei $\{|\phi_n\rangle\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem. Unter der *Spur* eines Operators $\hat{A}$ verstehen wir den Ausdruck

$$\mathrm{Sp}\hat{A} = \sum_n \langle \phi_n | \hat{A} | \phi_n \rangle \quad .$$

Wir definieren nun für einen normierten Zustand $|\Psi\rangle$ den Dichteoperator

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi| \quad .$$

Zeigen Sie:

(a) Für den Erwartungswert einer Observablen A gilt

$$< \hat{A} >= \mathrm{Sp}\left(\hat{\rho}\hat{A}\right) \quad .$$

(b) Es gilt

$$\mathrm{Sp}\left(\hat{\rho}^2\right) = 1 \quad .$$

35. **Hermitesche Operatoren** **(6 Punkte)**
In dieser Aufgabe sollen einige Eigenschaften hermitescher Operatoren diskutiert werden.

(a) Es sei $|e_i\rangle$ ein vollständiges Orthonormalsystem aus abzählbaren Elementen. Der Operator $\hat{H}$ habe diese $|e_i\rangle$ als Eigenvektoren. $\hat{H}$ ist außerdem hermitesch und positiv definit, d.h. alle Eigenwerte sind positiv. Zeigen Sie unter Verwendung der Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen, daß dann für beliebige $|u\rangle$, $|v\rangle$ gilt:

$$|\langle u | \hat{H} | v \rangle|^2 \leq \langle u | \hat{H} | u \rangle \langle v | \hat{H} | v \rangle \quad .$$

(b) Es seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ hermitesche Operatoren. Wie lautet der zum Kommutator $[\hat{A}, \hat{B}]$ adjungierte Operator? Bestimmen Sie $\xi \in \mathbb{C}$ so, daß $\xi[\hat{A}, \hat{B}]$ hermitesch ist.

Rückseite beachten! $\longrightarrow$

36. **Lösen einer Integralgleichung** **(6 Punkte)**

Man betrachte die Integralgleichung

$$f(x) + u(x) \int\limits_a^b v^*(x')f(x')dx' = g(x) \quad .$$

Gesucht ist die Funktion $f(x)$ für beliebige $u(x)$ und $v(x)$. Zeigen Sie zunächst: Obige Gleichung läßt sich als Ortsdarstellung der Gleichung

$$|f\rangle + |u\rangle\langle v|f\rangle = |g\rangle$$

auffassen. Konstruieren Sie dann den inversen Operator zu

$$\hat{A} = \hat{I} + |u\rangle\langle v|$$

und lösen Sie damit die Integralgleichung.
Hinweis: Um den inversen Operator zu finden, kann man z.B. so vorgehen, daß man sich die Wirkungsweise von $\hat{A}$ im $\mathbb{R}^2$ klarmacht und versucht eine Operation zu finden, die diese rückgängig macht. Das kann man dann wieder leicht in die formale Schreibweise übertragen. Zeigen Sie dann aber auf jeden Fall noch, daß das Ergebnis auch wirklich $\hat{A}^{-1}$ ist!