INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

Quantenmechanik I — WiSe 2006/2007

10. Übungsblatt — Abgabe: Donnerstag, 11.01.07 (bis 9.40 Uhr) im Kasten bei A316/A317

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de

28. **Wellenfunktion des Wasserstoffatoms** **(8 Punkte)**
Zur Zeit $t = 0$ wird der Zustand eines Wasserstoffatoms durch die Wellenfunktion

$$\Psi(\underline{r}, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{10}} \left[2\chi_{1,0,0} + \chi_{2,1,0} + \sqrt{2}\chi_{2,1,1} + \sqrt{3}\chi_{2,1,-1} \right]$$

beschrieben. Mit $\chi_{n,l,m} = R_{n,l}(r) Y_l^m(\theta, \phi)$ werden die in der Vorlesung angegebenen Eigenfunktionen bezeichnet.

(a) Bestimmen Sie den Erwartungswert für die Energie dieses Systems.
(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, das System bei einer Messung in einem Zustand mit $l = m = 1$ vorzufinden.
(c) Wie groß ist zur Zeit $t = 0$ die Wahrscheinlichkeit, das Elektron innerhalb einer Kugel mit Radius $r_0 = 10^{-12}$ m um das Proton anzutreffen?
(d) Wie lautet die Wellenfunktion $\Psi(\underline{r}, t)$ zu einem beliebigen Zeitpunkt $t > 0$?

29. **Vektorräume $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$** **(7 Punkte)**
Im $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ kann man die Kets einfach als n-Spaltentupel (Spaltenvektoren bezüglich der Einheitsbasis) und die Bras als die entsprechenden (komplex konjugierten) n-Zeilentupel darstellen. Ein Operator $\hat{A}$ wird durch eine $(n \times n)$-Matrix $\underline{\underline{A}}$ dargestellt (wiederum bezüglich der Einheitsbasis). $\langle a|b\rangle = \sum_i a_i^\star b_i$ sei das Standard-Skalarprodukt.

(a) Zeigen Sie, daß in beiden Räumen
$$\mathrm{Sp}\left(|a\rangle\langle b|\right) = \langle b|a\rangle$$
gilt.
Hinweis: Mit $\mathrm{Sp}(\underline{\underline{A}})$ wird die Spur der Matrix $\underline{\underline{A}}$ bezeichnet.
(b) Zeigen Sie, daß der adjungierte Operator $\hat{A}^+$ im $\mathbb{R}^n$ der Matrix $\underline{\underline{A}}^T$ und im $\mathbb{C}^n$ der Matrix $\left(\underline{\underline{A}}^T\right)^*$ entspricht.
(c) Zeigen Sie weiterhin, daß im $\mathbb{R}^n$
$$\hat{A}|\Psi\rangle = a|\Psi\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle\Psi|\hat{A}^+ = a\langle\Psi|$$
bzw. im $\mathbb{C}^n$
$$\hat{A}|\Psi\rangle = a|\Psi\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle\Psi|\hat{A}^+ = a^*\langle\Psi|$$
gilt.

30. **Eigenschaften von Operatoren I** **(9 Punkte)**
Die Operatoren $\hat{U}$ und $\hat{V}$ seien unitär, $\hat{H}$ sei hermitesch. Zeigen Sie, daß

(a) $a\hat{U}$ mit $aa^* = 1$ (b) $\hat{U}^n$ (c) $\hat{U}\hat{V}$ (d) $\exp(i\hat{H})$ (e) $\left(\hat{I} - i\hat{H}\right)\left(\hat{I} + i\hat{H}\right)^{-1}$

unitär sind und daß

(f) $i\left(\hat{U} - \hat{I}\right)\left(\hat{U} + \hat{I}\right)^{-1}$ (g) $\hat{U}\hat{H}\hat{U}^{-1}$

hermitesch sind.

Rückseite beachten! ⟶

31. **Eigenschaften von Operatoren II** **(4 Punkte)**
Wir betrachten zwei weitere Beispiele:

(a) Zeigen Sie, daß für einen hermiteschen Operator $\hat{A}$ stets der Erwartungswert $\langle \hat{A}^2 \rangle \geq 0$ ist.

(b) Die n-te (n sei eine natürliche Zahl) Potenz eines Operators $\hat{L}$ ergebe den Einheitsoperator: $\hat{L}^n = \hat{I}$. Bestimmen Sie die Eigenwerte von $\hat{L}$.

32. **Basiszerlegung** **(2 Punkte)**
Es sei $|e_i\rangle$ ein vollständiges Orthonormalsystem aus abzählbaren Elementen. Zeigen Sie, daß für einen normierten Ket $|\Psi\rangle$ gilt:

$$|\Psi\rangle = \sum_i c_i |e_i\rangle \Rightarrow \sum_i |c_i|^2 = 1 \qquad .$$

Frohe Weihnachten und einen guten Start ins Jahr 2007!

Michael Dorn ⊙ Jörg Duhme ⊙ Hendrik Kriegel ⊙ Sven Simon ⊙ Uwe Motschmann