



25. Sommerfeldsche Polynommethode II: Dreidimensionaler Oszillator (11 Punkte)

Der Hamilton-Operator des kugelsymmetrischen, dreidimensionalen harmonischen Oszillators ist gegeben durch

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2.$$

- (a) Zeigen Sie: Mit dem Ansatz $\Psi(\underline{r}) = \frac{1}{r} \chi_l(r) Y_{l,m}(\theta, \phi)$ nimmt die radiale Schrödinger-Gleichung folgende Form an:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2mU}{\hbar^2} - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2} r^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \chi_l(r) = 0. \quad (1)$$

Bemerkung: Für $l = 0$ ist diese Gleichung identisch zur Schrödinger-Gleichung des eindimensionalen harmonischen Oszillators.

- (b) Begründen Sie: Für $r \rightarrow 0$ sind die relevanten Terme der Gleichung (1):

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \chi_l(r) = 0.$$

Zeigen Sie, daß die allgemeine Lösung dieser Gleichung durch

$$\chi_l(r) = a_l r^{l+1} + \frac{b_l}{r^l}$$

mit Konstanten a_l, b_l gegeben ist.

- (c) Motiviert durch das Ergebnis aus Aufgabenteil (b) und analog zum eindimensionalen harmonischen Oszillator machen wir folgenden Potenzreihenansatz für die Lösung von Gl. (1):

$$\chi_l(r) = e^{-q^2/2} q^{l+1} \sum_{k=0}^{\infty} c_{l,k} q^k$$

mit $q = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} r$. Setzen Sie diesen Ansatz in die radiale Schrödinger-Gleichung ein und leiten Sie durch Vergleich der Koeffizienten gleicher q -Potenzen eine Rekursionsrelation für die $c_{l,k}$ mit festem l her.

- (d) Leiten Sie aus der Abbruchbedingung $c_{l,k} = 0$ für $k > k_l$ einen Ausdruck für die Energie-Eigenwerte U_N her.
- (e) Seien $\psi_n(x)$ die aus der Vorlesung bekannten Eigenfunktionen des *eindimensionalen* harmonischen Oszillators zur Energie $U_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$.

i. Begründen Sie, daß

$$\Psi(\underline{r}) = \psi_i(x) \psi_j(y) \psi_k(z) \quad (2)$$

eine Eigenfunktion des dreidimensionalen harmonischen Oszillators ist.

- ii. Bestimmen Sie mit Hilfe von Gl. (2) die Eigenwerte U_N des dreidimensionalen harmonischen Oszillators und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem aus Aufgabenteil (d).
- iii. Bestimmen Sie ausgehend von den Lösungen (2) den Entartungsgrad von $U_N = \hbar\omega \left(N + \frac{3}{2}\right)$ für $N = 0, N = 1$ sowie $N = 2$.

Rückseite beachten! $\longrightarrow$

26. Teilchen zwischen konzentrischen Kugelschalen**(4 Punkte)**

Ein Teilchen der Masse m sei zwischen zwei konzentrischen Kugelschalen mit den Radien $r = a$ und $r = b$ eingesperrt. Das Potential ist also durch $V = 0$ für $a \leq r \leq b$ und $V = \infty$ für $r < a$ bzw. $r > b$ gegeben. Für diese Situation sollen einige Eigenschaften der Wellenfunktion diskutiert werden.

Betrachten Sie den Spezialfall $l = 0$ (Drehimpulsquantenzahl) und bestimmen Sie die Energie-Eigenwerte sowie die zugehörigen Wellenfunktionen. Zum Lösen der radialen Schrödinger-Gleichung eignet sich wiederum ein Ansatz der Form $R(r) = \frac{1}{r}\chi(r)$.

27. Eindimensionaler harmonischer Oszillator**(15 Punkte)**

Wir betrachten erneut den in der Vorlesung behandelten eindimensionalen Oszillator. Mit ϕ_n werden die in der Vorlesung angegebenen normierten Lösungen der zeitfreien Schrödinger-Gleichung bezeichnet.

- (a) Betrachten Sie den Grundzustand des Oszillators ($n = 0$). Zeigen Sie, daß die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen außerhalb des klassisch erlaubten Bereichs anzutreffen, durch

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_1^\infty dt e^{-t^2}$$

gegeben ist. Der Zahlenwert dieses Integrals kann in Tabellenwerken nachgeschlagen werden und liegt bei $P \approx 16\%$.

Hinweis: Erklären Sie zunächst, was der *klassisch erlaubte Bereich* ist.

- (b) Es seien ϕ_0 und ϕ_1 die Wellenfunktionen des Grundzustandes ($n = 0$) bzw. des ersten angeregten Zustandes ($n = 1$). Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei die Wellenfunktion des Oszillators durch

$$\Psi = A\phi_0 + B\phi_1$$

gegeben. Mit A und B werden reelle Konstanten bezeichnet. Bestimmen Sie A und B so, daß der Erwartungswert $\langle x \rangle$ (i) minimal, (ii) maximal wird.

- (c) Zur Zeit $t = 0$ sei die Wellenfunktion des Oszillators durch

$$\Psi(x, t = 0) = A \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \phi_n(x)$$

gegeben.

- i. Bestimmen Sie die (reelle) Normierungskonstante A .
 - ii. Zeigen Sie, daß $|\Psi(x, t)|^2$ eine Überlagerung zeitlich periodischer Funktionen ist und bestimmen Sie die längste auftretende Periode.
 - iii. Bestimmen Sie den Erwartungswert der Energie.
- (d) Auf das Teilchen (z.B. ein Ion der Ladung q) wirke nun zusätzlich ein konstantes elektrisches Feld E parallel zur Bewegungsrichtung. Somit lautet der Hamilton-Operator

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - qEx \quad .$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen von H .

Hinweis: Fügen Sie eine geeignete quadratische Ergänzung in H ein.