INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

Quantenmechanik I — WiSe 2006/2007

8. Übungsblatt — Abgabe: Donnerstag, 14.12.06 (bis 9.40 Uhr) im Kasten bei A316/A317

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de

22. **Endlich hoher Potentialkasten II: Tunneleffekt** **(6 Punkte)**
Man betrachte eine Potentialbarriere der Form

$$\hat{V}(x) = \begin{cases} V_0 & \text{für} \quad 0 < x < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad ; \qquad V_0 > 0 \quad .$$

Ein von links kommendes Teilchen der Masse m und der Energie $0 < U < V_0$ würde klassisch betrachtet an der Barriere abprallen. Quantenmechanisch tunnelt das Teilchen jedoch mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit durch die Barriere hindurch. Dies soll näher untersucht werden.

Als Ansatz zur Lösung der Schrödinger-Gleichung benutze man im linken Teil ($x < 0$) eine Überlagerung von ein- und auslaufender Welle. Im Bereich $0 < x < a$ kommt der bekannte Ansatz für $U < V_0$ zum Einsatz, während im rechten Teil ($x > a$) nur eine auslaufende Welle angesetzt werden soll. Es sei A die Amplitude der von links einlaufenden Wellenfunktion und C die der nach rechts auslaufenden. Zeigen Sie, daß für den Transmissionskoeffizienten (Tunnelwahrscheinlichkeit)

$$T = \frac{|C|^2}{|A|^2} = \frac{1}{\cosh^2(\gamma a) + \frac{1}{4}\left(\frac{\gamma}{k} - \frac{k}{\gamma}\right)^2 \sinh^2(\gamma a)} \quad \text{mit} \quad \gamma = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - U)} \quad \text{und} \quad k = \sqrt{\frac{2mU}{\hbar^2}}$$

gilt.

23. **Gebundene Zustände im Delta-Potential** **(10 Punkte)**
Ziel dieser Aufgabe ist das Lösen der zeitfreien Schrödinger-Gleichung für ein attraktives Delta-Potential

$$V(x) = -V_0\delta(x) \quad \text{mit} \quad V_0 > 0 \quad .$$

In diesem Fall ist die Wellenfunktion $\phi(x)$ zwar stetig bei $x = 0$, die Ableitung $\phi'(x)$ weist dort jedoch eine Sprungstelle auf.

(a) Es sei $\epsilon > 0$ gegeben. Zeigen Sie, daß bei $x = 0$ die Sprungbedingung

$$\lim_{\epsilon \to 0} \phi'(\epsilon) - \lim_{\epsilon \to 0} \phi'(-\epsilon) + \frac{2mV_0}{\hbar^2}\phi(0) = 0$$

gilt.

(b) Wir betrachten den Fall gebundener Zustände, d.h. es ist $U < 0$. Zeigen Sie, daß genau ein gebundener Zustand existiert. Geben Sie den zugehörigen Eigenwert und die normierte Wellenfunktion an.

(c) Berechnen Sie für die in Teilaufgabe (b) gefundene Wellenfunktion den Erwartungswert und die Varianz des Ortsoperators.

(d) Bestimmen Sie $x_0 > 0$ so, daß die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Bereich $|x| < x_0$ anzutreffen, genau 1/2 ist.

Rückseite beachten! ⟶

24. **Sommerfeldsche Polynommethode I: Zweidimensionaler Oszillator** **(14 Punkte)**
Es sollen die Eigenzustände des zweidimensionalen harmonischen Oszillators mit dem Potential

$$V(x, y) = \frac{k}{2}(x^2 + y^2)$$

bestimmt werden.

(a) Bestimmen Sie die Eigenfunktionen, die Energieeigenwerte und deren Entartungsgrad in kartesischen Koordinaten mittels eines Separationsansatzes. Man gelangt zu denselben Differentialgleichungen wie im eindimensionalen Fall, deren bekannte Lösungen natürlich zu verwenden sind.

(b) In der folgenden Teilaufgabe benötigen Sie den Laplace-Operator in ebenen Polarkoordinaten (r, ϕ). Der Laplace-Operator in Polarkoordinaten ist durch

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

gegeben. Leiten Sie diese Beziehung mit Hilfe der Kettenregel her.

(c) Führen Sie dieselbe Rechnung wie in Teilaufgabe (a) nochmals in ebenen Polarkoordinaten (r, ϕ) aus. Separieren Sie in Radial- und Winkelanteil und bestimmen Sie die allgemeine Lösung für den Winkelanteil.

(d) Zur Lösung der Differentialgleichung für den Radialteil verwende man die Sommerfeldsche Polynommethode. Bestimmen Sie so wiederum die Energieeigenwerte und den Entartungsgrad und reproduzieren Sie das Ergebnis von Teilaufgabe (a).
Hinweis: Zeigen Sie zunächst durch Betrachtung der Grenzfälle $r \to 0$ und $r \to \infty$, daß der Ansatz

$$R(r) = r^\alpha \exp\left(-\beta r^2\right) \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu r^\nu$$

mit Konstanten α, β, a_ν zum Lösen der Radialgleichung geeignet ist. Es ist nicht verlangt, die Lösung für den Radialteil explizit anzugeben. Von Interesse sind hier nur die Eigenwerte.