INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

Quantenmechanik I — WiSe 2006/2007

7. Übungsblatt — Abgabe: Donnerstag, 07.12.06 (bis 9.40 Uhr) im Kasten bei A316/A317

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de

20. **Unendlich hoher Potentialkasten** **(15 Punkte)**
Wir betrachten erneut das in der Vorlesung behandelte Problem eines Teilchens, das in einen unendlich hohen, eindimensionalen Potentialkasten ($0 \leq x \leq a$) eingesperrt ist.

(a) Zeigen Sie: Die in der Vorlesung angegebenen Eigenfunktionen $\phi_n(x)$ erfüllen für große Quantenzahlen n die Beziehung

$$\Delta x \, \Delta p \propto n\hbar \quad .$$

(b) Zur Zeit $t = 0$ sei die normierte Wellenfunktion des Teilchens durch

$$\Psi(x, t = 0) = \sqrt{\frac{8}{5a}} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right] \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

gegeben.

i. Wie lautet die Wellenfunktion des Teilchens zu einem späteren Zeitpunkt $t = t_0 > 0$?
ii. Bestimmen Sie die mittlere Energie des Systems zu den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = t_0$.
iii. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen zur Zeit $t = t_0$ in der linken Hälfte der Box anzutreffen (d.h. im Intervall $0 \leq x \leq a/2$)?

(c) Nun behandeln wir den dreidimensionalen Fall: Ein Teilchen befinde sich in einem rechteckigen Kasten mit den Ausdehnungen $0 \leq x_1 \leq A$, $0 \leq x_2 \leq B$, $0 \leq x_3 \leq C$. Innerhalb des Kastens ist das Potential $V = 0$; außerhalb gilt $V = \infty$.

i. Bestimmen Sie die Eigenfunktionen und Energieniveaus aus der zeitfreien Schrödinger-Gleichung. Verwenden Sie für $\phi(x_1, x_2, x_3)$ einen geeigneten Separationsansatz und greifen Sie auf die Ergebnisse der Vorlesung zurück.
ii. Betrachten Sie den Spezialfall $A = B = C$. Schätzen Sie ab, wie viele Zustände N unterhalb einer vorgegebenen Energie U existieren. U sei dabei so groß, daß $N \gg 1$ gilt.

21. **Endlich hoher Potentialkasten I: Gebundene Zustände** **(15 Punkte)**
Gegeben sei das Potential

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{für} \quad x < -l \quad \text{(I)} \\ 0 & \text{für} \quad -l \leq x \leq l \quad \text{(II)} \\ V_0 & \text{für} \quad l < x \quad \text{(III)} \end{cases} \qquad , \quad V_0 > 0 \quad .$$

Es sollen einige Eigenschaften der Lösungen der eindimensionalen, stationären Schrödinger-Gleichung für $0 < U < V_0$ diskutiert werden. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

(a) Als allgemeine Lösungen in den Bereichen (I)-(III) setze man an:

$$\phi_I = Ae^{qx} + \tilde{A}e^{-qx}$$
$$\phi_{II} = Be^{ikx} + Ce^{-ikx}$$
$$\phi_{III} = \tilde{D}e^{qx} + De^{-qx}$$

Bestimmen Sie q und k als Funktion der Energie U. Warum müssen $\tilde{A}$ und $\tilde{D}$ null sein?

(b) Es läßt sich zeigen, daß an den Unstetigkeitsstellen von $V(x)$ sowohl ϕ als auch $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}x$ stetig sein müssen. Stellen Sie unter diesen Bedingungen ein Gleichungssystem für A, B, C und D auf.

Rückseite beachten! ⟶

(c) Es sollen nun die nichttrivialen Lösungen dieses Gleichungssystems bestimmt werden. Zeigen Sie, daß es genau zwei Arten von solchen Lösungen gibt, und zwar symmetrische und antisymmetrische, *ohne* diese explizit zu bestimmen.

(d) Zeigen Sie weiterhin, daß für die symmetrischen Lösungen

$$q = k\tan(kl)$$

und für die antisymmetrischen Lösungen

$$q = -k\cot(kl)$$

gelten muß. Zeigen Sie, daß außerdem gilt:

$$q = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}V_0 - k^2} \quad .$$

(e) Die obigen Bedingungen liefern im Prinzip die Lösungen für die Energieeigenwerte U_n. Jedoch sind die Gleichungen transzendent. Man kann aber einige Eigenschaften aus einer graphischen Lösung ablesen. Begründen Sie mittels dieser graphischen Lösung:

- Es gibt immer mindestens einen und höchstens endlich viele diskrete Energieeigenwerte.
- Der Zustand mit der niedrigsten Energie ist symmetrisch.
- Die folgenden Zustände sind immer abwechselnd antisymmetrisch und symmetrisch.