



16. Kommutatoren

(16 Punkte)

In dieser Aufgabe soll das Rechnen mit Kommutatoren geübt werden.

- (a) Zeigen Sie, daß für beliebige Operatoren A , B und C die *Jacobi-Identität*

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

gilt. Formulieren Sie eine analoge Aussage für die aus der klassischen Mechanik bekannten Poisson-Klammern und beweisen Sie diese.

- (b) Berechnen Sie für den eindimensionalen Ortsoperator x und den eindimensionalen Impulsoperator p den Kommutator $[p, x^{47}]$.

- (c) Zeigen Sie: Für ein Polynom f ist

$$[x, f(p)] = -\frac{\hbar}{i} f'(p) \quad .$$

- (d) Berechnen Sie für die Komponenten des Drehimpulsoperators $\underline{L} = \underline{x} \times \underline{p}$ die folgenden Kommutatoren $(i, j \in \{1, 2, 3\})$:

i. $[L_i, L_j]$

ii. $[L_i, L^2]$

iii. $[L_i, p_j]$

Hinweis: Es ist hilfreich (aber nicht verlangt), die Komponentenschreibweise und die Summenkonvention zu verwenden.

- (e) Berechnen Sie für eine differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ den Kommutator

$$[L_3, f(|\underline{x}|^2)] \quad .$$

Dabei ist $|\underline{x}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

- (f) Es sei $[A, B] \neq 0$, aber $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$. Zeigen Sie, daß dann

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B]$$

gilt.

17. Das Ehrenfestsche Theorem

(4 Punkte)

Gegeben seien die beiden Hamilton-Operatoren

(a) $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m(\omega_1^2 x^2 + \omega_2 x + \epsilon)$

(b) $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - \frac{A}{x^2}$

Mit ω_1 , ω_2 , ϵ , ω und A werden Konstanten bezeichnet.

Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für die Mittelwerte $\langle x \rangle$ und $\langle p \rangle$. Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für den Fall (a).

18. Erwartungswert des Impulsoperators

(3 Punkte)

Der Erwartungswert des Impulsoperators $\underline{p} = (p_1, p_2, p_3)$ ist durch

$$\langle \underline{p} \rangle = \int dV \psi^*(\underline{x}, t) \frac{\hbar}{i} \nabla \psi(\underline{x}, t)$$

gegeben. Zeigen Sie: $\langle \underline{p} \rangle$ ist reell.

19. **Berechnung von Erwartungswerten****(7 Punkte)**

Ein Teilchen werde durch die normierte Wellenfunktion

$$\Psi(x) = \begin{cases} 2\alpha\sqrt{\alpha}xe^{-\alpha x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

beschrieben¹.

- (a) Für welches x hat $|\Psi|^2$ sein Maximum?
- (b) Berechnen Sie $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle p \rangle$ und $\langle p^2 \rangle$.
- (c) Die *Varianz* eines Operators A ist durch

$$\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$$

gegeben. Berechnen Sie das Produkt $\Delta x \Delta p$.

- (d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen zwischen $x = 0$ und $x = 1/\alpha$ anzutreffen?
- (e) Berechnen Sie die zu ψ gehörende Stromdichte j .

¹Hinweis: Diese Funktion beschreibt einen angeregten Zustand des Elektrons im Wasserstoffatom.