INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. S. Simon

QUANTENMECHANIK I — WISE 2006/2007

5. Übungsblatt — Abgabe: Donnerstag, 23.11.06 (bis 9.40 Uhr) im Kasten bei A316/A317

Fragen zu den Übungsaufgaben: S. Simon, Raum A317, Tel. 391-5187, sven.simon@tu-bs.de
Neuer Klausurtermin: Mittwoch, d. 28.02.07, 9:00-12:00 Uhr, Raum: MS 3.1

12. **Klassische Lebensdauer eines Wasserstoffatoms** **(8 Punkte)**
In der Vorlesung wurde diskutiert, daß gemäß der klassischen Physik das Elektron eines Wasserstoffatoms auf seiner Bahn Energie abstrahlen würde und somit in den Kern stürzt. Die Zeit, die es dafür benötigt, soll abgeschätzt werden. Wir betrachten also das klassische Modell eines Elektrons, das im Abstand a_0 (Bohrscher Radius) um ein Proton kreist.

(a) Berechnen Sie die Kreisfrequenz für die Bahnbewegung des Elektrons.

(b) Eine beschleunigtes Elektron strahlt gemäß dem Larmorschen Theorem

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -\frac{2}{3}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\underline{x}}^2$$

Energie ab.
Wir nehmen an, daß die charakteristische Zeit, mit der sich das Elektron zum Kern hinbewegt, sehr viel größer ist als die in (a) berechnete Umlaufzeit. Das legt nahe, alle Größen während eines Umlaufs zu mitteln. Auf diese Weise gelangt man über die Bewegungsgleichung zu einer Differentialgleichung für den Kernabstand $a(t)$, aus der sich die Zeit τ ergibt, nach der das Elektron den Kern erreicht. Weiterhin benötigt man noch den Virialsatz für ein $1/r$-Potential:

$$2\langle T_{kin}\rangle = -\langle V\rangle \quad .$$

Die Klammern $\langle\rangle$ bezeichnen die erwähnte Mittelung über einen Umlauf. Geben Sie τ an.

13. **Kontinuitätsgleichung** **(5 Punkte)**
In dieser Aufgabe wird die Kontinuitätsgleichung für die Wahrscheinlichkeitsstromdichte diskutiert.

(a) Gegeben sei zu einem festen $\underline{k}$ die ebene Welle

$$\psi(\underline{x},t) = A\,\mathrm{e}^{i(\underline{k}\cdot\underline{x}-\omega(k)t)} \ .$$

i. Bestimmen Sie $\omega(k)$ so, daß $\psi(\underline{x},t)$ die Schrödingergleichung für ein freies Teilchen, d.h.

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\triangle \quad ,$$

löst.

ii. Berechnen Sie zu $\psi(\underline{x},t)$ die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\underline{j}$.

iii. Überzeugen Sie sich, daß die Aufenthaltswahrscheinlichkeit $\rho(\underline{x},t) = |\psi(\underline{x},t)|^2$ zusammen mit $\underline{j}$ aus Aufgabenteil (ii) die Kontinuitätsgleichung erfüllt.

(b) Es seien $\Psi_1(\underline{x},t)$ und $\Psi_2(\underline{x},t)$ zwei Lösungen der Schrödinger-Gleichung mit dem Hamilton-Operator $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\triangle + \hat{V}(\underline{x})$ und reellem $\hat{V}$. Beweisen Sie die verallgemeinerte Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Psi_1^\star\Psi_2\right) + \frac{\hbar}{2mi}\nabla\cdot\left(\Psi_1^\star\,\nabla\Psi_2 - \Psi_2\,\nabla\Psi_1^\star\right) = 0 \quad .$$

Rückseite beachten! ⟶

14. **Zerfließen eines Wellenpakets** **(11 Punkte)**

In der Vorlesung wurde die Dispersionsrelation $\omega(k)$ für ein Wellenpaket bis zur ersten Ordnung entwickelt. Hier soll nun der Einfluß der zweiten Ordnung untersucht werden. Dazu soll die zeitliche Entwicklung der eindimensionalen Wellenfunktion

$$\Psi(x,t) = \int \mathrm{d}k\, A(k) e^{i(kx-\omega(k)t)} \quad \text{mit} \quad \omega(k) = \omega(k_0) + \left.\frac{\partial\omega}{\partial k}\right|_{k=k_0} (k-k_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}\right|_{k=k_0} (k-k_0)^2$$

betrachtet werden.

(a) Für $A(k)$ wird eine Gauß-Verteilung mit Breite Δk angenommen:

$$A(k) = e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2(\Delta k)^2}} \quad .$$

Berechnen Sie $\Psi(x,t)$, indem Sie die k-Integration ausführen. Bestimmen Sie daraus die Materialdichte $|\Psi|^2$. Diese hat wieder die Form einer Gauß-Verteilung im Ortsraum mit Breite $\Delta x(t)$.
Hinweis: Verlangt ist eine ausführliche Berechnung der auftretenden Integrale ohne Verwendung von Formelsammlungen.

(b) Bestimmen Sie $\Delta x \cdot \Delta k$ für $t = 0$.

(c) Geben Sie einen Ausdruck für die charakteristische Verbreiterungszeit τ an, in der sich die Breite des Wellenpakets verdoppelt. Die Dispersionsrelation ist durch $\omega(k) = \hbar k^2/(2m)$ gegeben.

(d) Ein Elektron werde zum Zeitpunkt $t = 0$ aus der Elektronenhülle eines Atoms herausgeschlagen. Für das Wellenpaket dieses Elektrons soll eine Breite von 1Å angenommen werden. Bestimmen Sie τ.

15. **Diracsche δ-Funktion** **(6 Punkte)**

Wir betrachten die Abbildung δ_{x_0}, die auf (stetige) reelle Funktionen f einer reellen Variablen wie folgt wirkt:

$$\delta_{x_0}[f] := f(x_0).$$

(a) Zeigen Sie, daß die Funktionen

$$d_l(x) := \begin{cases} 1/l & ; \quad -l/2 \le x \le l/2 \\ 0 & ; \quad \text{sonst} \end{cases}$$

normiert sind (d.h., $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, d_l(x) = 1$) und berechnen Sie das Faltungsintegral

$$d_l[f] := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, d_l(x - x_0) f(x) \quad ,$$

wobei f eine beliebige, reelle Testfunktion ist. Was erhalten Sie im Grenzfall $\lim_{l\to 0} d_l[f]$? Skizzieren Sie $d_l(x)$ für $l = 1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots$.
Hinweis: Verwenden Sie den Mittelwertsatz der Integralrechnung.

(b) Verfahren Sie analog zu Teil (a) mit den Funktionen

$$g_l(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}l} \exp(-x^2/(2l^2)) \quad .$$

(c) Für die Diracsche δ-Funktion wird üblicherweise die Schreibweise

$$\delta_{x_0}[f] := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta(x - x_0) f(x)$$

verwendet. In drei Dimensionen definieren wir die δ-Funktion über:

$$\delta(\underline{r}) := \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3) \quad ; \quad \underline{r} = (x_1, x_2, x_3) \quad .$$

Berechnen Sie:

i. $\int \mathrm{d}V\, \underline{r}\, \rho(\underline{r})$ mit $\rho(\underline{r}) = \sum_{i=1}^{N} \delta(\underline{r} - \underline{r}_i)$; $V = \mathbb{R}^3$.

ii. $\int \mathrm{d}V\, e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}\, \delta(\underline{r})$; $V = \mathbb{R}^3$ (Fouriertransformation der δ-Funktion).