Klausurvorbereitungsblatt Bearbeitungszeit: keine Abgabe

1. **Wissensfragen** **(24 Punkte)**

Benennen Sie alle auftretenden Symbole.

(a) Geben Sie drei physikalische Phänomene an, die erst mit Hilfe der Quantenmechanik erklärt werden konnten.

(b) Wie lauten die Energien U_n der gebundene Zustände des dreidimensionalen Harmonischen Oszillators? Geben Sie auch den Entartungsgrad den U_n an.

(c) Wie hängen die Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\theta, \phi)$ vom Winkel ϕ ab?

(d) Geben Sie die Vertauschungsrelationen $[\hat{L}_i, \hat{L}_j]$ für die Komponenten des Drehimpulses an.

(e) Wie lautet die Schrödingergleichung in Impulsdarstellung?

(f) Durch welche Bedingung wird der adjungierte Operator $\hat{A}^\dagger$ eines Operators $\hat{A}$ definiert?

(g) Nennen Sie die wichtigsten Eigenschaften hermitescher Operatoren. Welche Rolle spielen diese Operatoren in der Quantenmechanik?

(h) Wie lautet der Hamiltonoperator für einen freien Spin im Magnetfeld?

(i) Geben Sie die Definition von Auf- und Absteigeoperator sowie die zugehörigen Eigenwertgleichungen an.

(j) Skizzieren Sie Idee und Vorgehen bei der stationären Störungstheorie nach Rayleigh-Schrödinger.

(k) Erläutern Sie die Grundgedanken hinter Schrödingers Katze.

2. **Kommutatoren und Operatoren** **(5 Punkte)**

Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

(a) Zeigen Sie, daß für beliebige Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$ und $\hat{C}$ die *Jacobi-Identität*

$$\left[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]\right] + \left[\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]\right] + \left[\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]\right] = 0 \tag{1}$$

gilt.

(b) Berechnen Sie für eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ den Kommutator

$$\left[\hat{L}_3, f(|\underline{\hat{x}}|^2)\right] \quad . \tag{2}$$

in Ortsdarstellung. Dabei ist $|\underline{\hat{x}}|^2 = \hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 + \hat{x}_3^2$ und $\hat{L}_3$ bezeichnet die dritte Komponente des Drehimpulsoperators.

Bitte wenden $\longrightarrow$

3. **Spur eines Operators** **(5 Punkte)**

Es sei $\{|\phi_n\rangle,\, n = 0, 1, 2, \dots\}$ eine Orthonormalbasis des Hilbert-Raums $\mathcal{H}$. Unter der Spur eines Operators $\hat{A}$ verstehen wir den Ausdruck

$$\mathrm{Sp}\left(\hat{A}\right) \equiv \sum_n \langle\phi_n|\hat{A}|\phi_n\rangle \quad . \tag{3}$$

(a) Zeigen Sie: Für zwei Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ gilt

$$\mathrm{Sp}\left(\hat{A}\hat{B}\right) = \mathrm{Sp}\left(\hat{B}\hat{A}\right) \quad . \tag{4}$$

Folgern Sie daraus: Ist $\hat{U}$ unitär, so gilt

$$\mathrm{Sp}\left(\hat{A}\right) = \mathrm{Sp}\left(\hat{U}\hat{A}\hat{U}^\dagger\right) \quad . \tag{5}$$

(b) Zeigen Sie: Für einen Operator $\hat{A}$ gilt

$$\mathrm{Sp}\left(\hat{A}\hat{A}^\dagger\right) = \sum_{m,n} \left|\langle\phi_m|\hat{A}|\phi_n\rangle\right|^2 \quad . \tag{6}$$

(c) Es sei $\{|\mu_n\rangle,\, n = 0, 1, 2, \dots\}$ eine weitere Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$.
Zeigen Sie: Die Spur eines Operators $\hat{A}$ ist unabhängig von der gewählten Basis, d.h. es gilt

$$\sum_n \langle\phi_n|\hat{A}|\phi_n\rangle = \sum_n \langle\mu_n|\hat{A}|\mu_n\rangle \quad . \tag{7}$$

(d) Es seien $|a\rangle, |b\rangle \in \mathcal{H}$ zwei beliebige Zustände. Zeigen Sie:

$$\mathrm{Sp}\left(|a\rangle\langle b|\right) = \langle b|a\rangle \quad . \tag{8}$$

4. **Schrödinger- und Heisenberg-Bild** **(5 Punkte)**

Wir betrachten ein System, dessen Hamilton-Operator nicht explizit von der Zeit abhängt. Es sei $\hat{A}_S$ der Operator zu einer Observablen A des Systems im Schrödinger-Bild. Mit $\hat{A}_H$ bezeichnen wir den entsprechenden Operator im Heisenberg-Bild. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sollen Schrödinger-Bild und Heisenberg-Bild zusammenfallen.

Zeigen Sie: Ist der Anfangszustand $|\psi(t = 0)\rangle$ ein Eigenzustand von $\hat{A}_S$, so ist $|\psi(t)\rangle$ für $t > 0$ ein Eigenvektor von $\hat{A}_H(-t)$ zum selben Eigenwert.

Bitte wenden $\longrightarrow$

5. **Zweidimensionaler harmonischer Oszillator** **(7 Punkte)**

Wir betrachten den *zwei*dimensionalen harmonischen Oszillator mit dem Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2\right) \qquad .$$

(a) Geben Sie die Energieniveaus dieses Systems an. Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Ist der Grundzustand dieses Systems entartet? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Zeigen Sie, daß die Operatoren $\hat{H}$ und $\hat{L}_3$ dieselben Eigenfunktionen besitzen.

6. **Gebundener Zustand im asymmetrischen Delta-Potential** **(13 Punkte)**

Gegeben sei das folgende eindimensionale Potential:

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x) \tag{9}$$

mit

$$V_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leq a \\ \infty & \text{für} \quad x > a \end{cases} \qquad \text{und} \qquad V_2(x) = -W_0\,\delta(x) \quad . \tag{10}$$

Es gilt $a > 0$ und $W_0 > 0$. Wir betrachten nun die (eindimensionale) Bewegung eines Teilchens der Masse m in diesem Potential. Es soll gezeigt werden, dass höchstens eine Lösung der zeitfreien Schrödinger-Gleichung mit $U < 0$ existiert. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Geben Sie die Lösung $\phi(x)$ der stationären Schrödinger-Gleichung in den drei Bereichen $x < 0$, $0 \leq x \leq a$ und $a < x$ an.

(b) Leiten Sie die Sprungbedingung für $\phi'(x)$ an der Stelle $x = 0$ her.

(c) Welche weiteren Bedingungen gelten für die Wellenfunktion $\phi(x)$ bei $x \to -\infty$, $x = 0$ und $x = a$?

(d) Lösen Sie das aus den Aufgabenteilen (b) und (c) resultierende Gleichungssystem und zeigen Sie, dass die erlaubten Energiewerte U der Bedingung

$$\exp(2ka) = \frac{\frac{mW_0}{\hbar^2}}{\frac{mW_0}{\hbar^2} - k} \qquad \text{mit} \qquad k = \sqrt{\frac{-2mU}{\hbar^2}} \tag{11}$$

genügen.

Hinweis: Eine Normierung der Lösung $\phi(x)$ ist *nicht* verlangt.

(e) Zeigen Sie anhand einer graphischen Lösung von Gleichung (11): Ist die Ungleichung

$$\frac{\hbar^2}{mW_0} < 2a \tag{12}$$

erfüllt, so existiert *genau ein* gebundener Zustand. Ist die Ungleichung *nicht* erfüllt, so existiert *kein* gebundener Zustand.

Bitte wenden ⟶

7. **Wasserstoffatom** **(13 Punkte)**

In dieser Aufgabe sollen einige Eigenschaften der Wellenfunktionen des H-Atoms diskutiert werden. Die beiden Teilaufgaben können dabei unabhängig voneinander bearbeitet werden.

(a) Wir betrachten die normierten Eigenfunktionen $\chi_{n,l,m}(r,\theta,\phi) = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta,\phi)$ des Wasserstoffatoms zu den Eigenwerten U_n. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich das System in einem Zustand, der durch die Wellenfunktion

$$\psi(r,\theta,\phi,t=0) = N\left(4\chi_{1,0,0} + 3\chi_{2,1,1} - \chi_{2,1,0} + 2\chi_{2,1,-1} + \sqrt{6}\chi_{3,1,1}\right) \tag{13}$$

beschrieben wird.

i. Bestimmen Sie den (reellen) Normierungsfaktor N.

ii. Geben Sie die Wellenfunktion $\psi(r,\theta,\phi,t)$ zu Zeiten $t > 0$ an.

iii. Zeigen Sie, dass sich der Erwartungswert der Energie schreiben lässt als

$$< H >= \sum_n |A_n|^2 U_n \tag{14}$$

und geben Sie die Energie in Vielfachen der Grundzustandsenergie U_1 an.

(b) Im zweiten Teil der Aufgabe betrachten wir (zum Zeitpunkt $t = 0$) die Wellenfunktion

$$\phi(\underline{r}) = k_1 \exp\left(-k_2|\underline{r}|\right) \qquad . \tag{15}$$

Dabei sind k_1 und k_2 positive Konstanten. Der Ortsvektor $\underline{r}$ ist in kartesischen Koordinaten gegeben, d.h. $\underline{r} = (x_1, x_2, x_3)$.

i. Bestimmen Sie die Parameter k_1 und k_2 so, dass $\phi(\underline{r})$ die stationäre Schrödinger-Gleichung zu dem Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{\underline{\hat{p}}^2}{2\mu} - \frac{A}{|\underline{r}|} \qquad (A > 0, \quad A = \text{const}) \tag{16}$$

löst und normiert ist. Mit μ wird die reduzierte Masse bezeichnet. Wie lautet der zu $\phi(\underline{r})$ gehörende Eigenwert als Funktion von A und μ?

Beachten Sie: Der Radialteil des Laplace-Operators ist durch

$$\Delta_r = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\right) \tag{17}$$

gegeben. Für die Berechnung des auftretenden Integrals ist die Beziehung

$$\int_0^\infty z^2 \exp(-\lambda z)\,\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\lambda^2}\int_0^\infty \exp(-\lambda z)\,\mathrm{d}z \tag{18}$$

sehr hilfreich.

ii. Welche Quantenzahlen n, l und m gehören zum Zustand ϕ (kurze Begründung)?

Die 1. Klausur findet am Mi., 29. Februar 2012,
die 2. Klausur am Do., 5. April 2012 statt;
beide jeweils um 9.30 Uhr in MS 3.1.