INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

QUANTENMECHANIK WS 2011/12

9. Übungsblatt Abgabe: Mo., 09.01.2012 bis 14.00 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

24. **Ein paar Kleinigkeiten** **(5 Punkte)**

(a) Es sei $|\alpha\rangle$ ein Eigenzustand des hermiteschen Operators $\hat{A}$. Zudem sei ein beliebiger Operator $\hat{B}$ gegeben. Berechnen Sie den Erwartungswert des Kommutators $[\hat{A}, \hat{B}]$ im Zustand $|\alpha\rangle$.

(b) Es sei $|a\rangle$ ein Eigenzustand des Operators $\hat{A}$ zum Eigenwert a. Zeigen Sie, dass $|a\rangle$ auch Eigenzustand von $\hat{A}^{-1}$ ist, und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert.

(c) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte eines unitären Operators komplexe Zahlen vom Betrag 1 sind.

(d) Es seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ hermitesche Operatoren. Wie lautet der zum Kommutator $[\hat{A}, \hat{B}]$ adjungierte Operator? Bestimmen Sie $\xi \in \mathbb{C}$ so, daß $\xi[\hat{A}, \hat{B}]$ hermitesch ist.

(e) Die n-te (n sei eine natürliche Zahl) Potenz eines Operators $\hat{L}$ ergebe den Einheitsoperator: $\hat{L}^n = \hat{I}$. Bestimmen Sie die Eigenwerte von $\hat{L}$.

25. **Dyadische Produkte** **(5 Punkte)**

Es sei $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem des zweidimensionalen Hilbert-Raums $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$. Wir betrachten den Operator

$$\hat{A} = |\phi\rangle \otimes \langle\phi| \equiv |\phi_1\rangle\langle\phi_2| - |\phi_2\rangle\langle\phi_1| \quad . \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass $\hat{A}$ unitär ist. Bestimmen Sie die Eigenwerte und -vektoren von $\hat{A}$ und $\hat{A}^\dagger$.

26. **Eigenschaften von Operatoren** **(10 Punkte)**

Die Operatoren $\hat{U}$ und $\hat{V}$ seien unitär, $\hat{H}$ sei hermitesch. Zeigen Sie, dass die Operatoren

(a) $a\hat{U}$ mit $aa^* = 1$ (b) $\hat{U}^n$ (c) $\hat{U}\hat{V}$ (d) $\exp(i\hat{H})$

(e) $\left(\hat{I} - i\hat{H}\right)^{-1}\left(\hat{I} + i\hat{H}\right)$ (f) $i\left(\hat{U} - \hat{I}\right)\left(\hat{U} + \hat{I}\right)^{-1}$ (g) $\hat{U}\hat{H}\hat{U}^{-1}$

unitär ((a)–(e)) bzw. hermitesch ((f)–(g)) sind.

★★

Frohe Weihnachten und einen guten Start ins Jahr 2012!