INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

QUANTENMECHANIK WS 2011/12

8. Übungsblatt — Abgabe: Mo., 19.12.2011 bis 14.00 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

23. Die Weihnachtsaufgabe (20 Punkte)

Bekanntlich taucht der Weihnachtsmann am Heiligen Abend in der Regel plötzlich und unerwartet im Wohnzimmer auf, ohne dass jemand bemerkt hat, wie er hinein gelangt ist. Die simple Erklärung, er würde einfach durch den Kamin hinabsteigen, kann getrost in das Reich der Fabel verwiesen werden. Selbstverständlich macht sich der Weihnachtsmann nicht die Mühe, an Häusern und in Kaminen herumzuklettern. Außerdem ist die Hauswand meist völlig vereist, so dass ohnehin niemand daran hinaufklettern kann. Unsere Kenntnisse der Quantenmechanik erlauben eine viel plausiblere Erklärung: Aufgrund des *quantenmechanischen Tunneleffekts* muss der Weihnachtsmann nur oft genug gegen die Hauswand laufen, um ins Wohnzimmer zu gelangen. In dieser Aufgabe wollen wir diese Theorie quantitativ untersuchen.

Wir betrachten dazu einen $m = 80\,\mathrm{kg}$ schweren Weihnachtsmann, der mit einer Geschwindigkeit von $v = 30\,\mathrm{km/h}$ gegen eine Hauswand der Dicke $a = 30\,\mathrm{cm}$ rennt. Den Weihnachtsmann wollen wir quantenmechanisch durch eine ebene Welle mit der Energie U beschreiben; die Hauswand approximieren wir durch eine Potentialbarriere der Höhe V_0.

(a) Wir betrachten also zunächst die stationäre, eindimensionale Schrödinger-Gleichung mit dem Stufenpotential

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{für} \quad 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad , \tag{1}$$

im Bereich $0 < U < V_0$. Da es leider auch passieren kann, dass der Weihnachtsmann von der Wand abprallt, müssen wir für $x < 0$ neben der (nach rechts mit Amplitude A) einlaufenden auch eine reflektierte Welle betrachten (Amplitude R), während wir ihn für $x > a$ nur durch eine transmittierte Welle (mit Amplitude T) beschreiben brauchen. Geben Sie geeignete Ansätze für die Wellenfunktionen in den drei Bereichen an.

(b) Nun aber zurück zum Weihnachtsmann: Bestimmen Sie die allgemein die Wahrscheinlichkeit, dass der Weihnachtsmann nach der oben beschriebenen Methode ins Wohnzimmer gelangt bzw. von der Wand abprallt, d.h. bestimmen Sie die Verhältnisse $|T^2|/|A|^2$ und $|R^2|/|A|^2$. Als Ergebnis sollten Sie für den Transmissionskoeffizienten (Tunnelwahrscheinlichkeit)

$$\frac{|T|^2}{|A|^2} = \frac{1}{\cosh^2(qa) + \frac{1}{4}\left(\frac{q}{k} - \frac{k}{q}\right)^2 \sinh^2(qa)} \tag{2}$$

Bitte wenden ⟶

mit

$$q = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\,(V_0 - U)} \quad \text{und} \quad k = \sqrt{\frac{2mU}{\hbar^2}}$$

erhalten.

(c) Nehmen Sie nun einen sinnvollen Wert für V_0 an (im Verhältnis zu U) und geben Sie einen Zahlenwert für die Tunnelwahrscheinlichkeit des armen Weihnachtsmanns an.

Spielen die konkreten Werte der Geschwindigkeit v und der Dicke $2a$ eine wesentliche Rolle für das Ergebnis? Was passiert bei $v = 0$?

(d) Wie verhält sich (grob abgeschätzt) die Wahrscheinlichkeit, dass alle Atome des Weihnachtsmanns unabhängig voneinander durch die Wand tunneln, zu der Wahrscheinlichkeit, dass der Weihnachtsmann als Ganzes tunnelt (und im Wohnzimmer auch als Weihnachtsmann ankommt)?

(e) Um sicherzustellen, dass sich der Weihnachtsmann nicht einfach in Luft auflöst, soll nun noch die Kontinuitätsgleichung überprüft werden. Bestimmen Sie dazu die zu den entsprechenden Wellenfunktionen gehörenden Stromdichten $j_A(x)$, $j_R(x)$ und $j_T(x)$ und überprüfen Sie die Beziehung

$$j_A + j_R = j_T \quad . \tag{3}$$

Überprüfen Sie auch den Grenzfall $a \to 0$.