INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

6. Übungsblatt — Abgabe: Mo., 5.12.2011 bis 14.00 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

19. **Gebundene Zustände im doppelten Delta-Potential** **(10 Punkte)**

Wir betrachten die eindimensionale Bewegung eines Teilchens der Masse m in dem Potential

$$V(x) = -V_0 \left\{\delta(x-a) + \delta(x+a)\right\} \quad \text{mit einer Konstanten} \quad V_0 > 0 \quad . \tag{1}$$

Es gilt $a > 0$. Ziel der Aufgabe ist das Lösen der stationären Schrödinger-Gleichung für negative Energien $U < 0$.

(a) Die Lösungen der Schrödinger-Gleichung für dieses Problem lassen sich wie folgt klassifizieren:

- Symmetrische Lösungen $\phi_S(x)$: Es gilt $\phi_S(-x) = \phi_S(x)$.
- Antisymmetrische Lösungen $\phi_A(x)$: Es gilt $\phi_A(-x) = -\phi_A(x)$.

Zudem führen wir den Parameter

$$k = \sqrt{\frac{-2mU}{\hbar^2}} \quad \in \mathbb{R} \tag{2}$$

ein. Geben Sie geeignete Ansätze für die Lösungen $\phi_S(x)$ und $\phi_A(x)$ an. Eine Normierung der Lösungen ist *nicht* verlangt.
Zeigen Sie außerdem: Der zu einer symmetrischen Lösung $\phi_S(x)$ gehörende Wert von k genügt der Gleichung

$$\exp\left(-2ka\right) = \frac{\hbar^2}{mV_0}k - 1 \quad . \tag{3}$$

Der zu einer antisymmetrischen Lösung $\phi_A(x)$ gehörende Wert von k genügt der Gleichung

$$-\exp\left(-2ka\right) = \frac{\hbar^2}{mV_0}k - 1 \quad . \tag{4}$$

(b) Diskutieren Sie anhand einer graphischen Lösung der Gleichungen (3) und (4), ob zu jedem Wert von $U < 0$ sowohl eine symmetrische Lösung $\phi_S(x)$ als auch eine antisymmetrische Lösung $\phi_A(x)$ existiert.

20. **Eindimensionaler harmonischer Oszillator** **(10 Punkte)**

Alle Teilaufgaben können voneinander unabhängig bearbeitet werden.

(a) Betrachten Sie den Grundzustand des Oszillators ($n = 0$). Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen außerhalb des klassisch erlaubten Bereichs anzutreffen, durch

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_1^\infty \mathrm{d}t\, e^{-t^2} \tag{5}$$

gegeben ist. Der Zahlenwert dieses Integrals kann in Tabellenwerken nachgeschlagen werden und liegt bei $P \approx 16\%$. Erklären Sie zunächst, was der *klassisch erlaubte Bereich* ist.

(b) Zur Zeit $t = 0$ sei die Wellenfunktion des Oszillators durch

$$\Psi(x, t = 0) = A \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \phi_n(x) \tag{6}$$

gegeben.

i. Bestimmen Sie die (reelle) Normierungskonstante A.
ii. Zeigen Sie, dass $|\Psi(x,t)|^2$ eine Überlagerung zeitlich periodischer Funktionen ist und bestimmen Sie die längste auftretende Periode.
iii. Bestimmen Sie den Erwartungswert der Energie.

Hinweis: Die Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators sind durch

$$\phi_n(x) = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\hbar}} \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-\xi^2/2} (-1)^n e^{\xi^2} d_\xi^n e^{-\xi^2} \quad , \quad \xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \tag{7}$$

gegeben.