Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

5. Übungsblatt Abgabe: Mo., 28.11.2011 bis 14.00 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

17. **Stationäre Schrödingergleichung** **(8 Punkte)**

Das Lösen der stationären (zeitfreien) Schrödingergleichung

$$\hat{H}\phi_n(\underline{x}) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_{\underline{x}}^2 + \hat{V}(\underline{x})\right)\phi_n(\underline{x}) = U_n\phi_n(\underline{x}) \quad , \tag{1}$$

d.h. das Bestimmen der U_n (Eigenwerte) und der $\phi_n(x)$ (Eigenfunktionen), ist eine der Hauptaufgaben der Quantenmechanik. In 1D lässt sich das Problem z.B. für stückweise konstante Potentiale (Potentialkästen oder Potentialbarrieren)

$$\hat{V}(x) = V_{0,ij} \quad ; \quad x_i < x < x_j$$

oder für δ-Potentiale

$$\hat{V}(x) = V_0\,\delta(x - x_i)$$

analytisch gut bearbeiten.

(a) Sei nun $\hat{V}(x) = V_0$. Lösen Sie die Schrödingergleichung allgemein für $V_0 < U$ sowie für $V_0 > U$. Geben Sie auch mehrere Darstellungen der Lösungen an.

(b) Wie muss die Lösung noch modifiziert werden um die Normierbarkeit im Fall $V_0 > U$ zu gewährleisten? Skizzieren Sie $|\phi(x)|^2$ für die beiden verschiedenen Lösungstypen.

(c) Welche Vorteile haben die einzelnen Darstellungen der Lösungen?

Bemerkung: Normierbare Lösungen werden auch als gebundene Zustände bezeichnet. Im Fall $V_0 < U$ treten jedoch Lösungen auf, die im bisherigen Sinn nicht normierbar sind. Für weitere Details sei hier auf die Diskussion dieser Lösungen im Rahmen des Wasserstoffatoms verwiesen.

18. **Endlich hoher Potentialkasten I: Gebundene Zustände** **(12 Punkte)**

Gegeben sei das Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < -l \quad \text{(I)} \\ -V_0 & \text{für} \quad -l \le x \le l \quad \text{(II)} \\ 0 & \text{für} \quad l < x \quad \text{(III)} \end{cases} \quad , \quad V_0 > 0 \quad .$$

Es sollen einige Eigenschaften der Lösungen der eindimensionalen, stationären Schrödinger-Gleichung für $-V_0 < U < 0$ diskutiert werden. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

Bitte wenden ⟶

(a) Berücksichtigen Sie Ihre Ergebnisse aus Aufgabe 17 und geben Sie jeweils geeignete allgemeine Lösungen für die Bereiche (I)-(III) an. Verwenden Sie dabei die Abkürzungen

$$q = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(U + V_0)} \qquad k = \sqrt{\frac{-2mU}{\hbar^2}} \quad .$$

(b) In der Vorlesung wurden Übergangsbedingungen für die Wellenfunktion $\phi(x)$ an Potentialsprüngen diskutiert. Verwenden Sie diese um ein Gleichungssystem für die Konstanten in den allgemeinen Lösungen aus (a) aufzustellen.

(c) Es sollen nun die nichttrivialen Lösungen dieses Gleichungssystems bestimmt werden. Zeigen Sie, dass für die symmetrischen Lösungen

$$k = q \tan(ql)$$

und für die antisymmetrischen Lösungen

$$k = -q \cot(ql)$$

gelten muss. Zeigen Sie, dass außerdem gilt:

$$q^2 + k^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2} \quad .$$

(d) Die obigen Bedingungen liefern im Prinzip die Lösungen für die Energieeigenwerte U_n. Jedoch sind die Gleichungen transzendent. Man kann aber einige Eigenschaften aus einer graphischen Lösung ablesen. Begründen Sie mittels dieser graphischen Lösung:

- Es gibt immer mindestens einen und höchstens endlich viele diskrete Energieeigenwerte.
- Der Zustand mit der niedrigsten Energie ist symmetrisch.
- Die folgenden Zustände sind immer abwechselnd antisymmetrisch und symmetrisch.