INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

QUANTENMECHANIK WS 2011/12

4. Übungsblatt Abgabe: Mo., 21.11.2011 bis 14.00 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

14. **Quantenmechanik auf der Insel Φmarn** **(3 Punkte)**

Die Bewohner der Insel Φmarn verweigern die Akzeptanz der Quantentheorie, da für sie jedes Φ eine reelle Sache ist und sie eine Wissenschaft von Imaginärteilen der Welt strikt ablehnen! Können Sie Ihnen helfen und damit die Akzeptanz moderner Wissenschaft auf der Insel Φmarn verbessern?

(a) Schreiben Sie für die Wellenfunktion explizit $\Phi + \mathrm{i}\Psi$, wobei Φ und Ψ jetzt reellwertig sind. Setzten Sie diesen Ansatz in die (zeitabhängige) Schrödingergleichung ein. Trennen Sie diese in (je eine Gleichung für) Real- und Imaginärteil.

(b) Gewinnen Sie daraus durch Einsetzen eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Zeit für Φ. Diese ist die Schrödingergleichung wie sie den Bewohnern von Φmarn nahegebracht werden soll.

(c) Eine kritische Frage des Bürgermeisters von Φmarn ist, ob weiterhin die von Herrn James Clerk Maxwell (dem Herrn aus Aberdeen, der sie vor anderthalb Jahrhunderten besucht hat) beschriebenen ebenen Wellen – die seitdem nichts Böses auf der Insel angerichtet haben – diese auch nach der neuen Theorie weiter ungehindert passieren können. Nehmen Sie hierzu (1D) den Ansatz $\Phi = \sin(kx - \omega t)$ und zeigen Sie dass – wenn die Bewohner keine Potentialberge und Abschirmanlagen errichten, also für $V(x) = 0$ sorgen – solche Wellen die Insel auch weiterhin ohne Schaden passieren können.

15. **Kommutatoren** **(12 Punkte)**

In dieser Aufgabe soll das Rechnen mit Kommutatoren geübt werden.

(a) Zeigen Sie: Für beliebige Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$ und $\hat{C}$ gilt

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] \quad . \tag{1}$$

(b) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: Für beliebige Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$ und $n = 1, 2, \ldots$ gilt

$$\left[\hat{A}, \hat{B}^n\right] = \sum_{r=0}^{n-1} \hat{B}^r \left[\hat{A}, \hat{B}\right] \hat{B}^{n-r-1} \quad . \tag{2}$$

(c) Sei $\hat{A}$ nun eine Potenzreihe in $\hat{q_k}$ und $\hat{p_k}$. Zeigen Sie

$$[\hat{p_k}, \hat{A}] = -i\hbar\partial_{q_k}\hat{A} \quad . \tag{3}$$

(d) Berechnen Sie für die Komponenten des Drehimpulsoperators $\underline{\hat{L}} = \underline{\hat{q}} \times \underline{\hat{p}}$ die folgenden Kommutatoren ($i, j \in \{1, 2, 3\}$):

i. $[\hat{L}_i, \hat{L}_j]$ ii. $[\hat{L}_i, \hat{L}^2]$ iii. $[\hat{L}_i, \hat{q}_j]$

Hinweis: Bei dieser Teilaufgabe können Sie durch Verwendung von Komponentenschreibweise und Summenkonvention *sehr, sehr* viel Schreibarbeit sparen.

16. **Verallgemeinerte Unschärferelation** **(5 Punkte)**

In der Vorlesung wurde die Heisenbergsche Unschärferelation zwischen Orts- und Impulsoperator hergeleitet. In dieser Aufgabe soll nun die Unschärferelation für zwei Operatoren F und G hergeleitet werden. Gehen Sie dabei analog zur Vorlesung vor. Die verallgemeinerte Unschärferelation lautet dann

$$\Delta F \Delta G \geq \frac{1}{2} |\langle [F, G] \rangle| \quad . \tag{4}$$