


11. Welle-Teilchen-Dualismus II: Wellenpaket (6 Punkte)

Wir wollen versuchen ein Teilchen mittels des eindimensionalen Wellenpakets

$$\Psi(x, t) = \int dk A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)}$$

zu beschreiben. Dieses Paket besteht aus einer Trägerwelle, die sich mit der Phasengeschwindigkeit $v_{Ph} = \omega/k$ bewegt und einer Amplitude, die die Trägerwelle moduliert und damit die räumliche Lokalisierung des Wellenpakets beschreibt. Die Einhüllende A bewegt sich mit der der Gruppengeschwindigkeit $v_G = \partial_k \omega$.

- Stellen Sie eine Verbindung zu den Geschwindigkeiten aus Aufgabe 10 her und bestimmen Sie damit die Dispersionsrelation $\omega(k)$ für kräftefreie Materiewellen und leiten Sie die de Broglie-Beziehung $p = \hbar k$ her.
- Zeigen Sie, daß es physikalisch wenig sinnvoll ist, eine Gewehrkugel mit der Masse 10 g, die sich mit 300 m/s bewegt, als Materiewelle zu bezeichnen.

12. Berechnung von Erwartungswerten (7 Punkte)

Ein Teilchen werde durch die normierte Wellenfunktion

$$\Psi_0(x) = \frac{1}{(a\pi)^{1/4}} \exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right)$$

$$\Psi_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{a^{3/4}\pi^{1/4}} x \exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right)$$

beschrieben¹.

- Für welche(s) x hat $|\Psi|^2$ sein Maximum?
- Berechnen Sie $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle p \rangle$ und $\langle p^2 \rangle$.
- Die *Varianz* eines Operators A ist durch

$$\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2} \quad (1)$$

gegeben. Berechnen Sie das Produkt $\Delta x \Delta p$.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen zwischen $x = -\sqrt{a}$ und $x = \sqrt{a}$ anzutreffen?

¹Hinweis: Diese Funktion beschreibt einen Zustand beim Harmonischen Oszillator.

Hinweis: Die auftretenden Integrale können Sie bei Bedarf auch per Computer oder Taschenrechner bestimmen.

13. **Kontinuitätsgleichung**

(7 Punkte)

Die Gleichung

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \underline{j} = q(\underline{x}) - l(\underline{x}) \quad (2)$$

ist die allgemeine differentielle Form einer Kontinuitätsgleichung. ρ kann hierbei z.B. eine Ladungs-, Massen- oder Wahrscheinlichkeitsdichte bezeichnen, \underline{j} die dazugehörige Stromdichte und q und l sind ggf. vorhandene Quellen oder Senken.

- (a) Interpretieren Sie Gleichung 2 mithilfe des Gaußschen Satzes.
- (b) Betrachten wir nun wieder das Wellenpaket

$$\Psi(x, t) = \int dk A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} \quad .$$

Unter welcher Bedingung an $\omega(k)$ erfüllt $\Psi(x, t)$ die Schrödingergleichung für ein freies Teilchen?

- (c) Überzeugen Sie sich, dass die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $\rho(\underline{x}, t) = |\psi(\underline{x}, t)|^2$ zusammen mit der Wahrscheinlichkeitsstromdichte \underline{j} die Kontinuitätsgleichung erfüllt.