INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

QUANTENMECHANIK WS 2011/12

2. Übungsblatt Abgabe: Mo., 07.11.2011 bis 14.00 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

8. **Diracsche δ-Funktion** **(5 Punkte)**

Wir betrachten die Abbildung δ_{x_0}, die auf (stetige) reelle Funktionen f einer reellen Variablen wie folgt wirkt:

$$\delta_{x_0}[f] := f(x_0).$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$d_l(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}l}\exp(-x^2/(2l^2))$$

normiert sind (d.h., $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, d_l(x) = 1$) und berechnen Sie das Faltungsintegral

$$d_l[f] := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, d_l(x - x_0) f(x) \quad ,$$

wobei f eine beliebige, reelle Testfunktion ist. Was erhalten Sie im Grenzfall $\lim_{l\to 0} d_l[f]$? Skizzieren Sie $d_l(x)$ für $l = 1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots$.
Hinweis: Verwenden Sie den Mittelwertsatz der Integralrechnung.

(b) Für die Diracsche δ-Funktion wird üblicherweise die Schreibweise

$$\delta_{x_0}[f] := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta(x - x_0) f(x)$$

verwendet. In drei Dimensionen definieren wir die δ-Funktion über:

$$\delta(\underline{r}) := \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3) \quad ; \quad \underline{r} = (x_1, x_2, x_3) \quad .$$

Berechnen Sie:

i. $\int \mathrm{d}V\, \underline{r}\, \rho(\underline{r})$ mit $\rho(\underline{r}) = \sum_{i=1}^{N} \delta(\underline{r} - \underline{r}_i)$; $V = \mathbb{R}^3$.

ii. $\int \mathrm{d}V\, e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}\, \delta(\underline{r})$; $V = \mathbb{R}^3$ (Fouriertransformation der δ-Funktion).

9. **Fourier-Transformation** **(8 Punkte)**

Die Fourier-Transformation $\hat{f}$ einer Funktion f ist in s Dimensionen definiert als

$$\hat{f}(\underline{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{s/2}} \int \mathrm{d}^s x\, f(\underline{x})\, \mathrm{e}^{-i\underline{k}\cdot\underline{x}} \quad .$$

(a) Sukzessives Anwenden von Fouriertransformation und Rücktransformation auf $f(x)$ sollte wieder auf $f(x)$ führen. Überprüfen Sie diese Aussage.

(b) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte der Funktionen

$$f(t) = \sum_i \cos \omega_i t \quad . \tag{1}$$

10. **Welle-Teilchen-Dualismus I: Klassische Mechanik** **(7 Punkte)**

In dieser Aufgabe werden wir zeigen, dass die Hamilton-Jacobi-Gleichung der klassischen Mechanik bereits Hinweise auf den Welle-Teilchen-Dualismus enthält. Wir betrachten dazu ein System aus einem Teilchen.

(a) Die Hamiltonfunktion sei nicht explizit zeitabhängig. Zeigen Sie, dass der Separationsansatz

$$S(q_k, t) = W(q_k) - \beta t$$

für die Wirkungsfunktion S auf $\beta = U$ führt (U bezeichnet hierbei die Gesamtenergie des Systems).

(b) Wie lässt sich S=const interpretieren?

(c) Bilden Sie das totale Differential und zeigen Sie, dass eine charakteristische Geschwindigkeit

$$v_S = \frac{U}{|\partial_{\underline{x}} W|}$$

auftritt.

(d) Betrachten Sie den Fall, dass sich ein Teilchen im Potential V bewegt und bestimmen Sie v_S sowie die Teilchengeschwindigkeit v_T in Abhängigkeit von U und V.

Bemerkung: Im Wellenbild würde man diese beiden Geschwindigkeiten mit Phasen- und Gruppengeschwindigkeit identifizieren.