Technische Universität Braunschweig

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

QUANTENMECHANIK WS 2011/12

0. Übungsblatt Abgabe: keine (Präsenzübung)

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

1. **Wellenfunktion des Waserstoffatoms**

   Im Grundzustand des Wasserstoffatoms wird die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons durch die Funktion

   $$\psi(x,y,z) = N \exp\left(-\frac{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{a_0}\right) \tag{1}$$

   beschrieben, wobei der Bohrsche Radius a_0 eine Konstante ist. Bestimmen Sie die Normierungskonstante N so, dass die Bedingung

   $$\int_{\mathbb{R}^3} \psi(x,y,z)\,\mathrm{d}V = 1 \tag{2}$$

   erfüllt ist.

2. **Integralsatz von Gauß**

   Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^3$ ein beliebig geformtes Volumen und ∂V dessen Oberfläche. Gegeben sei zudem ein Vektorfeld $\underline{F}(x,y,z)$. Dann besagt der Integralsatz von Gauß:

   $$\int_V \mathrm{div}\,\underline{F}\,\mathrm{d}V = \int_{\partial V} \underline{F}\cdot\mathrm{d}\underline{O} \quad . \tag{3}$$

   (a) Es sei $\underline{A} \in \mathbb{R}^3$ konstant und $\psi(x,y,z)$ gegeben durch Gleichung 1. Zeigen Sie

   $$\int_V \mathrm{div}\,(\underline{A}\psi)\,\mathrm{d}V = 0 \quad ,$$

   indem Sie als Volumen eine Kugel mit Radius R betrachten und anschließend den Grenzübergang $R \to \infty$ durchführen. Machen Sie sich klar, dass dies für alle Funktionen ψ gilt, die Gleichung 2 erfüllen.

   (b) Nutzen Sie den Satz von Gauß, um die partielle Integration in mehreren Dimensionen,

   $$\int_V \psi\,\mathrm{div}\underline{F}\,\mathrm{d}V = \int_{\partial V} \psi\,\underline{F}\,\mathrm{d}\underline{O} - \int_V \underline{F}\,\mathrm{grad}\,\psi\,\mathrm{d}V \quad , \tag{4}$$

   herzuleiten.

   (c) Leiten Sie weiterhin die 1. Greensche Integralformel für die skalaren Felder Φ und Ψ her:

   $$\int_V \Phi\,\Delta\Psi\,\mathrm{d}V + \int_V \mathrm{grad}\;\Phi\;\mathrm{grad}\;\Psi\,\mathrm{d}V = \int_{\partial V} \Phi\,\mathrm{grad}\;\Psi\,\mathrm{d}\underline{O} \quad . \tag{5}$$

3. **Rechnen mit komplexen Zahlen**

   Ein paar einfache Beispiele zur Wiederholung:

   (a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichungen $z^8 = 5$ und $z^8 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

   (b) Lösen Sie die Gleichung

   $$\frac{z}{1+i} - \frac{z}{1-i} = 1 + (z - z^*)\sin(\pi + i\ln 3) \quad .$$

   (c) Berechnen Sie $\ln(ie)$, i^i und $\sqrt[i]{i}$.

4. **Poisson-Klammern**

   Es seien $A = A(\underline{q}, \underline{p}, t)$ und $B = B(\underline{q}, \underline{p}, t)$ zwei Funktionen der generalisierten Koordinaten $\underline{q} = (q_1, \ldots, q_f)$, der generalisierten Impulse $\underline{p} = (p_1, \ldots, p_f)$ und der Zeit. Dann ist die Poisson-Klammer $\{A, B\}$ von A und B durch

   $$\{A, B\} = \sum_{\beta=1}^{f} \left(\frac{\partial A}{\partial q_\beta}\frac{\partial B}{\partial p_\beta} - \frac{\partial A}{\partial p_\beta}\frac{\partial B}{\partial q_\beta} \right) \tag{6}$$

   definiert.

   (a) Zeigen Sie, daß sich die kanonischen Bewegungsgleichungen in der Form

   $$\dot{q}_\alpha = \{q_\alpha, H\} \quad \text{und} \quad \dot{p}_\alpha = \{p_\alpha, H\} \tag{7}$$

   schreiben lassen. Mit H wird die Hamilton-Funktion bezeichnet.

   (b) Es sei $\underline{L} = (L_1, L_2, L_3)$ der dreidimensionale Drehimpulsvektor, (q_1, q_2, q_3) der kartesische Ortsvektor und (p_1, p_2, p_3) der kanonisch konjugierte Impulsvektor. Zeigen Sie folgende Beziehungen für die Poisson-Klammern:

   i. $\{L_i, q_j\} = \epsilon_{ijk} q_k$
   ii. $\{L_i, p_j\} = \epsilon_{ijk} p_k$
   iii. $\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k$.

Klausurtermin (vorläufig): 29. Februar 2011 (2. Termin: 5. April 2011)

Teilnahmevoraussetzungen: 50 % der Hausaufgabenpunkte. Zusätzlich muss in den Übungen zweimal eine Aufgabe erfolgreich vorgerechnet werden. Es besteht jedoch keine Anwesenheitspflicht in den Übungen.

Fragen an:

Hendrik Kriegel	h.kriegel@tu-bs.de	Raum A 317
Nils-Arne Rosien	N.Rosien@gmx.net	

Link:

http://www.tu-braunschweig.de/theophys/edu/wise-1112/qm1112