INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

QUANTENMECHANIK WS 2010/11

Klausurvorbereitungsblatt Bearbeitungszeit: **keine Abgabe**

1. **Wissensfragen** **(24 Punkte)**

   Benennen Sie alle auftretenden Symbole.

   (a) Geben Sie die Definition der Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\underline{j}$ an.
   Welche Gleichung verknüpft $\underline{j}$ mit $|\Psi|^2$? (Formel!)
   Wie ist diese Gleichung physikalisch zu interpretieren?

   (b) Was *besagt* die Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation? (kurze Erläuterung!)

   (c) Durch welchen Ansatz für $\psi(\underline{x}, t)$ gelangt man von der zeitabhängigen zur stationären Schrödinger-Gleichung?

   (d) Wie lauten die Energien U_n der gebundenen Zustände des Wasserstoffatoms? Geben Sie auch den Entartungsgrad der U_n an.

   (e) Wie hängen die Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\theta, \phi)$ vom Winkel ϕ ab?

   (f) Wie wirken die Operatoren $\hat{L}_3$ und $\hat{\underline{L}}^2$ auf die Kugelflächenfunktionen Y_l^m?

   (g) Wir betrachten eine Observable F. Welche Eigenschaften haben der zugehörige Operator $\hat{F}$ und das Eigenwertproblem von $\hat{F}$?

   (h) Geben Sie die Definition von Auf- und Absteigeoperator sowie die zugehörigen Eigenwertgleichungen an.

   (i) Wie lautet die Bewegungsgleichung für einen Operator $\hat{A}$ (i) im Schrödinger-Bild, (ii) im Heisenberg-Bild, (iii) im Dirac-Bild?

   (j) Skizzieren Sie Idee und Vorgehen bei der stationären Störungstheorie nach Rayleigh-Schrödinger.

2. **Eigenfunktionen des Bahndrehimpulses** **(9 Punkte)**

   Wir betrachten den Ortsoperator $\hat{\underline{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$, den Impulsoperator $\hat{\underline{p}} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3)$ sowie den Drehimpulsoperator $\hat{\underline{L}} = (\hat{L}_1, \hat{L}_2, \hat{L}_3)$.

   (a) Wir definieren die Operatoren

   $$\hat{L}_+ = \hat{L}_1 + i\hat{L}_2 \qquad \text{und} \qquad \hat{L}_- = \hat{L}_1 - i\hat{L}_2 \quad . \tag{1}$$

   Zeigen Sie:

   $$\hat{\underline{L}}^2 = \hat{L}_+\hat{L}_- - \hbar\hat{L}_3 + \left(\hat{L}_3\right)^2 \quad . \tag{2}$$

   (b) Wir betrachten die folgende Funktion des Ortes $\underline{r} = (x_1, x_2, x_3)$:

   $$\psi(\underline{r}) = (x_1 - ix_2)^3 \, f\left(|\underline{r}|\right) \quad . \tag{3}$$

   Mit f wird eine beliebige (hinreichend oft differenzierbare) Funktion bezeichnet.

i. Zeigen Sie, dass $\psi(\underline{r})$ eine Eigenfunktion von $\hat{L}_3$ ist. Wie lautet der zugehörige Eigenwert?

ii. Wie wirkt der Operator $\hat{L}_+\hat{L}_-$ auf $\psi(\underline{r})$?

iii. Zeigen Sie damit und unter Verwendung des Ergebnisses von Teilaufgabe (b): $\psi(\underline{r})$ ist auch Eigenfunktion von $\hat{\underline{L}}^2$. Wie lautet der zugehörige Eigenwert?

iv. Geben Sie die zu der angegebenen Funktion $\psi(\underline{r})$ gehörenden Quantenzahlen l und m an.

3. **Abstrakte Formulierung** **(9 Punkte)**

Die Vektoren $|e_1\rangle$, $|e_2\rangle$ und $|e_3\rangle$ mögen eine Orthonormalbasis des dreidimensionalen Hilbert-Raumes $\mathcal{H}$ bilden. Wir betrachten die Vektoren

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}|e_1\rangle - \frac{i}{2}|e_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|e_3\rangle \qquad \text{und} \qquad |\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|e_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}}|e_2\rangle \quad . \tag{4}$$

Zudem bezeichnen wir mit $\hat{\mathcal{P}}_\psi$ und $\hat{\mathcal{P}}_\chi$ die Projektionsoperatoren auf die von $|\psi\rangle$ bzw. $|\chi\rangle$ aufgespannten eindimensionalen Unterräume von $\mathcal{H}$.

(a) Sind $|\psi\rangle$ und $|\chi\rangle$ normiert?

(b) Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen der Projektionsoperatoren $\hat{\mathcal{P}}_\psi$ und $\hat{\mathcal{P}}_\chi$ bezüglich der Basis $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$.
Hinweis: Beachten Sie das Ergebnis von Teilaufgabe (a)!

(c) Ist der Operator $\hat{A} = \hat{I} - \hat{\mathcal{P}}_\psi - \hat{\mathcal{P}}_\chi$ ein Projektionsoperator? Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Zeigen Sie allgemein, dass unitäre Operatoren Eigenwerte vom Betrag eins haben.

4. **Streuung an einer Potentialbarriere** **(8 Punkte)**

Im Abstand $a > 0$ zu einer unendlich hohen Potentialwand befindet sich ein Delta-Peak. Das Potential lautet also:

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x) \tag{5}$$

mit

$$V_1(x) = \begin{cases} \infty & \text{für} \quad x < 0 \\ 0 & \text{für} \quad x > 0 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad V_2(x) = W_0\,\delta(x-a) \quad . \tag{6}$$

Der Parameter W_0 ist positiv. Ziel dieser Aufgabe ist das Lösen der stationären Schrödinger-Gleichung für positive Energien $U > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass die erste Ableitung der Wellenfunktion $\phi(x)$ bei $x = a$ die Anschlussbedingung

$$\lim_{\epsilon\to 0}\phi'(\epsilon + a) - \lim_{\epsilon\to 0}\phi'(-\epsilon + a) - \frac{2mW_0}{\hbar^2}\phi(a) = 0 \tag{7}$$

erfüllen muss.

(b) Bestimmen Sie die Lösung der zeitfreien Schrödinger-Gleichung für alle $x \in \mathbb{R}$. Verwenden Sie im Bereich $x > a$ einen Ansatz, der eine Überlagerung aus einer von rechts einlaufenden und einer reflektierten Welle darstellt: $\phi(x) = \exp(-ikx) + R\exp(ikx) \quad \text{für} \quad x > a$. Wie lauten die Parameter k und R?

5. **Potentialtopf mit Delta-Peak** **(10 Punkte)**

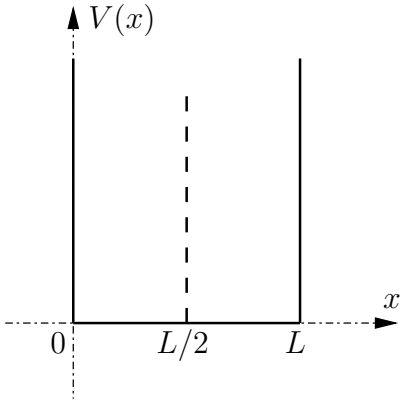
Ein Teilchen der Masse m ist in einen unendlich hohen Potentialkasten eingesperrt, dessen Wände sich bei $x = 0$ und $x = L$ befinden. Zusätzlich befindet sich in der Mitte des Potentialkastens (bei $x = L/2$) ein Delta-Peak. Das Potential lautet also

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x) \tag{8}$$

mit

$$V_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 < x < L \\ \infty & \text{für} \quad x < 0 \quad \text{oder} \quad x > L \end{cases} \qquad \text{und} \qquad V_2(x) = W_0\,\delta\left(x - \frac{L}{2}\right) \quad . \tag{9}$$

Die Konstante W_0 ist positiv. Wir betrachten wieder den Bereich $U > 0$.



(a) Zeigen Sie: Die Energieniveaus U dieses Systems genügen der Gleichung

$$\tan\frac{kL}{2} = -\frac{\hbar^2 k}{mW_0} \qquad \text{mit} \qquad k = \sqrt{\frac{2mU}{\hbar^2}} \quad . \tag{10}$$

(b) Es sei U_0 der kleinste (positive) Energiewert des Systems und $k_0 = \sqrt{\frac{2mU_0}{\hbar^2}}$. Begründen Sie anhand einer graphischen Lösung von Gl. (10):

$$\frac{\pi}{2} < \frac{k_0 L}{2} < \pi \quad . \tag{11}$$

6. **Eindimensionaler harmonischer Oszillator** **(12 Punkte)**

Alle Teilaufgaben können voneinander unabhängig bearbeitet werden.

(a) Betrachten Sie den Grundzustand des Oszillators ($n = 0$). Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen außerhalb des klassisch erlaubten Bereichs anzutreffen, durch

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_1^\infty \mathrm{d}t\, e^{-t^2} \tag{12}$$

gegeben ist. Der Zahlenwert dieses Integrals kann in Tabellenwerken nachgeschlagen werden und liegt bei $P \approx 16\%$. Erklären Sie zunächst, was der *klassisch erlaubte Bereich* ist.

(b) Zur Zeit $t = 0$ sei die Wellenfunktion des Oszillators durch

$$\Psi(x, t = 0) = A \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \phi_n(x) \tag{13}$$

gegeben.

i. Bestimmen Sie die (reelle) Normierungskonstante A.

ii. Zeigen Sie, dass $|\Psi(x, t)|^2$ eine Überlagerung zeitlich periodischer Funktionen ist und bestimmen Sie die längste auftretende Periode.

iii. Bestimmen Sie den Erwartungswert der Energie.

Hinweis: Die Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators sind durch

$$\phi_n(x) = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\hbar}} \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-\xi^2/2} (-1)^n e^{\xi^2} d_\xi^n e^{-\xi^2} \quad , \quad \xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \tag{14}$$

gegeben.

Die Klausur findet am Do., 17. Februar 2011 um 9.30 Uhr in MS 3.1 statt.