



29. Besetzungszahldarstellung

(10 Punkte)

In dieser Aufgabe sollen einige Eigenschaften der Auf- und Absteigeoperatoren $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$ sowie des Besetzungszahloperators $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ diskutiert werden.

(a) Beweisen Sie die folgenden Kommutatorrelationen für alle $m \in \mathbb{N}$:

i. $[\hat{a}^m, \hat{a}^\dagger] = m\hat{a}^{m-1}$

iii. $[\hat{N}, \hat{a}^m] = -m\hat{a}^m$

ii. $[\hat{a}, (\hat{a}^\dagger)^m] = m(\hat{a}^\dagger)^{m-1}$

iv. $[\hat{N}, (\hat{a}^\dagger)^m] = m(\hat{a}^\dagger)^m$.

(b) In der Besetzungszahldarstellung sind die Matrixelemente eines Operators $\hat{A}$ durch $\langle m|\hat{A}|n\rangle$ gegeben. Bestimmen Sie diese Matrixelemente für den Ortsoperator $\hat{x}$, den Impulsoperator $\hat{p}$ sowie für den Hamilton-Operator des eindimensionalen harmonischen Oszillators.

(c) Es sei $\hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$ der Operator der kinetischen und $\hat{V} = \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$ der Operator der potentiellen Energie des eindimensionalen harmonischen Oszillators. Zeigen Sie:

$$\langle n|\hat{T}|n\rangle = \langle n|\hat{V}|n\rangle \quad . \quad (1)$$

Wie ist Gl. (1) zu interpretieren?

30. Quantenmechanische Bilder

(10 Punkte)

Wir betrachten die eindimensionale Bewegung eines Teilchens unter dem Einfluss einer konstanten Kraft in Bewegungsrichtung. Die Dynamik des Teilchens soll in den drei aus der Vorlesung bekannten Bildern diskutiert werden.

(a) Geben Sie für das Schrödinger-, Heisenberg- und Dirac-Bild jeweils die Bewegungsgleichungen für alle vorkommenden Operatoren (auch für den Hamilton-Operator $\hat{H}$) und die Kets an. Wie lauten die benötigten Zeittranslationsoperatoren?

(b) Geben Sie jeweils die allgemeinen Lösungen der Bewegungsgleichungen für die Operatoren an.