



25. Eigenschaften von Operatoren II

(3 Punkte)

Wir betrachten zwei weitere Beispiele:

- (a) Es seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ hermitesche Operatoren. Wie lautet der zum Kommutator $[\hat{A}, \hat{B}]$ adjungierte Operator? Bestimmen Sie $\xi \in \mathbb{C}$ so, daß $\xi[\hat{A}, \hat{B}]$ hermitesch ist.
- (b) Die n -te (n sei eine natürliche Zahl) Potenz eines Operators $\hat{L}$ ergebe den Einheitsoperator: $\hat{L}^n = \hat{I}$. Bestimmen Sie die Eigenwerte von $\hat{L}$.

26. Diagonalisierung eines Operators

(12 Punkte)

Gegeben sei ein vollständiges Orthonormalsystem $\{|\phi_n\rangle, n = 1, \dots, N\}$. Wir definieren den Operator

$$\hat{H} = \alpha \sum_{n=1}^N |\phi_n\rangle\langle\phi_n| + \beta \sum_{n=1}^N \{ |\phi_n\rangle\langle\phi_{n+1}| + |\phi_{n+1}\rangle\langle\phi_n| \} \quad . \quad (1)$$

Dabei soll $|\phi_{N+1}\rangle := |\phi_1\rangle$ gelten. Mit α wird eine reelle Konstante bezeichnet. Ziel dieser Aufgabe ist die Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren von $\hat{H}$.

Gehen Sie wie folgt vor:

- (a) Betrachten Sie zunächst den Operator

$$\hat{A} = \sum_{n=1}^N |\phi_n\rangle\langle\phi_{n+1}| \quad . \quad (2)$$

Stellen Sie $\hat{H}$ mit Hilfe von $\hat{A}$ und $\hat{A}^\dagger$ dar. Zeigen Sie zudem, dass $\hat{A}$ unitär ist. Wie wirken $\hat{A}$ und $\hat{A}^\dagger$ auf einen Vektor $|\phi_m\rangle$?

- (b) Zeigen Sie, dass $\hat{H}$, $\hat{A}$ und $\hat{A}^\dagger$ dieselben Eigenvektoren besitzen.
- (c) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren von $\hat{A}$.
- (d) Bestimmen Sie aus den Ergebnissen von Teilaufgabe (b) die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\hat{H}$.

Bitte wenden $\longrightarrow$

27. Summenregel**(5 Punkte)**

Die Eigenwerte des eindimensionalen Hamilton-Operators

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2M} + \hat{V}(\hat{x}) \quad (3)$$

seien durch U_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ gegeben. Die zugehörigen Eigenkets bezeichnen wir mit $|\Phi_n\rangle$. Zeigen Sie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (U_n - U_0) |\langle \Phi_n | \hat{x} | \Phi_0 \rangle|^2 = \text{const} \quad . \quad (4)$$

Bestimmen Sie zudem den Wert der Konstanten.

Hinweis: Betrachten Sie den Ausdruck $\langle \Phi_m | \left[[\hat{H}, \hat{x}], \hat{x} \right] | \Phi_m \rangle$.