



22. Spur eines Operators

(4 Punkte)

Es sei $\{|\phi_n\rangle, n = 0, 1, 2, \dots\}$ eine Orthonormalbasis des Hilbert-Raums $\mathcal{H}$. Unter der Spur eines Operators $\hat{A}$ verstehen wir den Ausdruck

$$\text{Sp}(\hat{A}) \equiv \sum_n \langle \phi_n | \hat{A} | \phi_n \rangle \quad . \quad (1)$$

(a) Zeigen Sie: Für zwei Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ gilt

$$\text{Sp}(\hat{A}\hat{B}) = \text{Sp}(\hat{B}\hat{A}) \quad . \quad (2)$$

Folgern Sie daraus: Ist $\hat{U}$ unitär, so gilt

$$\text{Sp}(\hat{A}) = \text{Sp}(\hat{U}\hat{A}\hat{U}^\dagger) \quad . \quad (3)$$

(b) Zeigen Sie: Für einen Operator $\hat{A}$ gilt

$$\text{Sp}(\hat{A}\hat{A}^\dagger) = \sum_{m,n} \left| \langle \phi_m | \hat{A} | \phi_n \rangle \right|^2 \quad . \quad (4)$$

(c) Es sei $\{|\mu_n\rangle, n = 0, 1, 2, \dots\}$ eine weitere Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$.

Zeigen Sie: Die Spur eines Operators $\hat{A}$ ist unabhängig von der gewählten Basis, d.h. es gilt

$$\sum_n \langle \phi_n | \hat{A} | \phi_n \rangle = \sum_n \langle \mu_n | \hat{A} | \mu_n \rangle \quad . \quad (5)$$

(d) Es seien $|a\rangle, |b\rangle \in \mathcal{H}$ zwei beliebige Zustände. Zeigen Sie:

$$\text{Sp}(|a\rangle\langle b|) = \langle b | a \rangle \quad . \quad (6)$$

23. Eigenschaften von Operatoren

(10 Punkte)

Die Operatoren $\hat{U}$ und $\hat{V}$ seien unitär, $\hat{H}$ sei hermitesch. Zeigen Sie, dass

$$(a) \quad a\hat{U} \text{ mit } aa^* = 1 \quad (b) \quad \hat{U}^n \quad (c) \quad \hat{U}\hat{V} \quad (d) \quad \exp(i\hat{H})$$

$$(e) \quad (\hat{I} - i\hat{H})^{-1} (\hat{I} + i\hat{H})$$

unitär sind und dass

$$(f) \quad i(\hat{U} - \hat{I})(\hat{U} + \hat{I})^{-1} \quad (g) \quad \hat{U}\hat{H}\hat{U}^{-1}$$

hermitesch sind.

Bitte wenden $\longrightarrow$

24. Ein paar Kleinigkeiten**(6 Punkte)**

- (a) Es sei $|\alpha\rangle$ ein Eigenzustand des hermiteschen Operators $\hat{A}$. Zudem sei ein beliebiger Operator $\hat{B}$ gegeben. Berechnen Sie den Erwartungswert des Kommutators $[\hat{A}, \hat{B}]$ im Zustand $|\alpha\rangle$.
- (b) Es sei $|a\rangle$ ein Eigenzustand des Operators $\hat{A}$ zum Eigenwert a . Zeigen Sie, dass $|a\rangle$ auch Eigenzustand von $\hat{A}^{-1}$ ist, und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert.
- (c) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte eines unitären Operators komplexe Zahlen vom Betrag 1 sind.
- (d) Es sei $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem des zweidimensionalen Hilbert-Raums $\mathcal{H}$. Wir betrachten den Operator

$$\hat{A} \equiv |\phi_1\rangle\langle\phi_2| - |\phi_2\rangle\langle\phi_1| \quad . \quad (7)$$

Zeigen Sie, dass $\hat{A}$ unitär ist. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\hat{A}$ und $\hat{A}^\dagger$.