INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

QUANTENMECHANIK — WS 2010/11

8. Übungsblatt — Abgabe: Mo., 3.01.2011 bis 17.00 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

19. **Eigenfunktionen des Drehimpulses** **(8 Punkte)**

Eine quantenmechanische Hantel mit zwei Freiheitsgraden, den räumlichen Polarwinkeln θ und ϕ, sei (zum Zeitpunkt $t = 0$) in einem durch die Wellenfunktion

$$\psi(\theta, \phi) = \frac{1}{N}\left(\sin\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi + \sqrt{3}\cos\theta\right) \tag{1}$$

beschriebenen Zustand.

(a) Stellen Sie $\psi(\theta, \phi)$ als Linearkombination der Kugelflächenfunktionen

$$Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}}\, P_l^{|m|}(\cos\theta)\, \mathrm{e}^{im\phi} \tag{2}$$

dar. Bestimmen Sie die (reelle) Normierungskonstante N.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt eine Messung von $\underline{\hat{L}}^2$ den Wert $2\hbar^2$?

(c) Welche Werte können sich bei einer Messung von $\hat{L}_3$ ergeben?

(d) Mit welchen Wahrscheinlichkeiten misst man die nach Teilaufgabe (c) möglichen Werte?

20. **p-Orbitale** **(4 Punkte)**

Die in der vorangegangen Aufgabe untersuchten Zustände des H-Atoms mit $l = 1$ entsprechen den bekannten p-Orbitalen. Die zugehörigen Winkelanteile seien

$$p_z(\vartheta, \varphi) = Y_1^0(\vartheta, \varphi)$$
$$p_\pm(\vartheta, \varphi) = Y_1^{\pm 1}(\vartheta, \varphi) \quad ,$$

wobei in der gesamten Aufgabe die diversen Normierungskonstanten außer acht gelassen werden sollen.

(a) Skizzieren/Plotten Sie die Winkelabhängigkeit von $|\Psi|^2$, die zu p_z, p_+ und p_- gehört. Warum entsprechen p_+ und p_- nicht den aus der Chemie bekannten p-Orbitalen?

(b) Überlegen Sie, wie die Funktionen $p_x(\vartheta, \varphi)$ und $p_y(\vartheta, \varphi)$ aussehen müssten, um die bekannte Keulenform in x- bzw. y-Richtung zu erhalten.
Hinweis: Sie können hier auch auf Ergebnisse aus Aufgabe 19a zurückgreifen.

Bitte wenden ⟶

21. **Die Weihnachtsaufgabe** **(8 Punkte)**

Bekanntlich taucht der Weihnachtsmann am Heiligen Abend in der Regel plötzlich und unerwartet im Wohnzimmer auf, ohne dass jemand bemerkt hat, wie er hinein gelangt ist. Die simple Erklärung, er würde einfach durch den Kamin hinabsteigen, kann getrost in das Reich der Fabel verwiesen werden. Selbstverständlich macht sich der Weihnachtsmann nicht die Mühe, an Häusern und in Kaminen herumzuklettern. Außerdem ist die Hauswand meist völlig vereist, so dass ohnehin niemand daran hinaufklettern kann. Unsere Kenntnisse der Quantenmechanik erlauben eine viel plausiblere Erklärung: Aufgrund des *quantenmechanischen Tunneleffekts* muss der Weihnachtsmann nur oft genug gegen die Hauswand laufen, um ins Wohnzimmer zu gelangen. In dieser Aufgabe wollen wir diese Theorie quantitativ untersuchen.

Wir betrachten dazu einen $m = 80\,\text{kg}$ schweren Weihnachtsmann, der gegen eine Hauswand der Dicke $2a = 30\,\text{cm}$ rennt. Die Hauswand approximieren wir durch eine Potentialbarriere der Höhe V_0.

(a) Wir betrachten also zunächst die stationäre, eindimensionale Schrödinger-Gleichung mit dem Stufenpotential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad |x| > a \\ V_0 & \text{für} \quad |x| \leq a \end{cases} \tag{3}$$

und einer Energie U im Bereich $0 < U < V_0$. Gesucht ist eine Lösung dieser Gleichung, die für $x < -a$ eine (nach rechts) einlaufende und eine reflektierte und für $x > a$ eine transmittierte Welle beschreibt:

$$\phi(x) = \begin{cases} \exp(ikx) + R\exp(-ikx) & \text{für} \quad x < -a \\ T\exp(ikx) & \text{für} \quad x > +a \end{cases} . \tag{4}$$

Berechnen Sie die Koeffizienten R und T in Abhängigkeit von der Energie U. Überprüfen sie zudem die Beziehung $|R|^2 + |T|^2 = 1$.

Hinweis: Greifen Sie auf Ihre Ergebnisse aus Aufgabe 16, Blatt 6 zurück.

(b) Nun aber zurück zum Weihnachtsmann.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Weihnachtsmann nach der oben beschriebenen Methode ins Wohnzimmer gelangt, wenn er mit einer Geschwindigkeit von $v = 30\,\text{km/h}$ gegen die Hauswand rennt. Wie groß muss V_0 sein, um eine gute Approximation zu erhalten?
  Hinweis: Beschreiben Sie den Weihnachtsmann durch eine ebene Welle und benutzen Sie das Ergebnis von Teilaufgabe (a). Geben Sie die Tunnelwahrscheinlichkeit $|T|^2$ an.
- Spielen die konkreten Werte der Geschwindigkeit v und der Dicke $2a$ eine wesentliche Rolle für das Ergebnis? Was passiert bei $v = 0$?
- Wie verhält sich (grob abgeschätzt) die Wahrscheinlichkeit, dass alle Atome des Weihnachtsmanns unabhängig voneinander durch die Wand tunneln, zu der Wahrscheinlichkeit, dass der Weihnachtsmann als Ganzes tunnelt (und im Wohnzimmer auch als Weihnachtsmann ankommt)?

Frohe Weihnachten und einen guten Start ins Jahr 2011!