INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

QUANTENMECHANIK — WS 2010/11

7. Übungsblatt — Abgabe: Mo., 13.12.2010 bis 17.00 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

17. **Sommerfeldsche Polynommethode: Dreidimensionaler Oszillator (14 Punkte)**

Der Hamilton-Operator des kugelsymmetrischen, dreidimensionalen harmonischen Oszillators ist gegeben durch

$$H = \frac{\underline{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \, \underline{r}^2 \, .$$

(a) Zeigen Sie: Mit dem Ansatz $\Psi(\underline{r}) = \frac{1}{r}\, \chi_l(r)\, Y_{l,m}(\theta,\phi)$ nimmt die radiale Schrödinger-Gleichung folgende Form an:

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2mU}{\hbar^2} - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}\, r^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \chi_l(r) = 0 \, . \qquad (1)$$

Hinweis: Sie können hier auf Ergebnisse der Rechnung zum Wasserstoffatom zurückgreifen.

(b) Begründen Sie: Für $r \to 0$ sind die relevanten Terme der Gleichung (1):

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \chi_l(r) = 0 \, .$$

Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung dieser Gleichung durch

$$\chi_l(r) = a_l r^{l+1} + \frac{b_l}{r^l} \qquad (1)$$

mit Konstanten a_l, b_l gegeben ist.

(c) Erläutern Sie, dass aufgrund des Ergebnisses aus Aufgabenteil (b) und analog zum eindimensionalen harmonischen Oszillator folgender Potenzreihenansatz für die Lösung von Gl. (1) geeignet ist:

$$\chi_l(r) = \mathrm{e}^{-q^2/2}\, q^{l+1} \sum_{k=0}^{\infty} c_{l,k}\, q^k$$

mit $q = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, r$. Setzen Sie diesen Ansatz in die radiale Schrödinger-Gleichung ein und leiten Sie durch Vergleich der Koeffizienten gleicher q-Potenzen eine Rekursionsrelation für die $c_{l,k}$ mit festem l her.

(d) Leiten Sie aus der Abbruchbedingung $c_{l,k} = 0$ für $k > k_l$ einen Ausdruck für die Energie-Eigenwerte U_N her.

Bitte wenden ⟶

18. **Wellenfunktion des Wasserstoffatoms** **(6 Punkte)**

Zur Zeit $t = 0$ wird der Zustand eines Wasserstoffatoms durch die Wellenfunktion

$$\Psi(\underline{r}, t=0) = \frac{1}{\sqrt{10}} \left[2\chi_{1,0,0} + \chi_{2,1,0} + \sqrt{2}\chi_{2,1,1} + \sqrt{3}\chi_{2,1,-1}\right] \tag{2}$$

beschrieben. Mit $\chi_{n,l,m} = R_{n,l}(r)Y_l^m(\theta, \phi)$ werden die in der Vorlesung angegebenen Eigenfunktionen bezeichnet.

(a) Bestimmen Sie den Erwartungswert für die Energie dieses Systems.

(b) Wie groß ist zur Zeit $t = 0$ die Wahrscheinlichkeit, das Elektron innerhalb einer Kugel mit Radius $r_0 = 10^{-12}\,\mathrm{m}$ um das Proton anzutreffen? Bestimmen Sie dazu zunächst die Wahrscheinlichkeit als Funktion der $R_{n,l}$ und geben Sie die $R_{n,l}$ explizit an. Zur Berechnung eines konkreten Wertes der Wahrscheinlichkeit dürfen dann auch elektronische Hilfsmittel verwendet werden.

(c) Wie lautet die Wellenfunktion $\Psi(\underline{r}, t)$ zu einem beliebigen Zeitpunkt $t > 0$?