INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

QUANTENMECHANIK WS 2010/11

6. Übungsblatt Abgabe: Mo., 6.12.2010 bis 17.00 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

15. **Gebundene Zustände im doppelten Delta-Potential** **(10 Punkte)**

Wir betrachten die eindimensionale Bewegung eines Teilchens der Masse m in dem Potential

$$V(x) = -V_0 \left\{ \delta(x-a) + \delta(x+a) \right\} \quad \text{mit einer Konstanten} \quad V_0 > 0 \quad . \tag{1}$$

Es gilt $a > 0$. Ziel der Aufgabe ist das Lösen der stationären Schrödinger-Gleichung für negative Energien $U < 0$.

(a) Die Lösungen der Schrödinger-Gleichung für dieses Problem lassen sich wie folgt klassifizieren:

- Symmetrische Lösungen $\phi_S(x)$: Es gilt $\phi_S(-x) = \phi_S(x)$.
- Antisymmetrische Lösungen $\phi_A(x)$: Es gilt $\phi_A(-x) = -\phi_A(x)$.

Zudem führen wir den Parameter

$$k = \sqrt{\frac{-2mU}{\hbar^2}} \quad \in \mathbb{R} \tag{2}$$

ein. Geben Sie geeignete Ansätze für die Lösungen $\phi_S(x)$ und $\phi_A(x)$ an. Eine Normierung der Lösungen ist *nicht* verlangt.
Zeigen Sie außerdem: Der zu einer symmetrischen Lösung $\phi_S(x)$ gehörende Wert von k genügt der Gleichung

$$\exp(-2ka) = \frac{\hbar^2}{mV_0} k - 1 \quad . \tag{3}$$

Der zu einer antisymmetrischen Lösung $\phi_A(x)$ gehörende Wert von k genügt der Gleichung

$$-\exp(-2ka) = \frac{\hbar^2}{mV_0} k - 1 \quad . \tag{4}$$

(b) Diskutieren Sie anhand einer graphischen Lösung der Gleichungen (3) und (4), ob zu jedem Wert von $U < 0$ sowohl eine symmetrische Lösung $\phi_S(x)$ als auch eine antisymmetrische Lösung $\phi_A(x)$ existiert.

Bitte wenden ⟶

16. **Endlich hoher Potentialkasten II: Tunneleffekt** **(10 Punkte)**

Man betrachte eine Potentialbarriere der Form

$$\hat{V}(x) = \begin{cases} V_0 & \text{für} \quad 0 < x < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad ; \qquad V_0 > 0 \quad .$$

Ein von links kommendes Teilchen der Masse m und der Energie $0 < U < V_0$ würde klassisch betrachtet an der Barriere abprallen. Quantenmechanisch tunnelt das Teilchen jedoch mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit durch die Barriere hindurch. Dies soll näher untersucht werden.

(a) Als Ansatz zur Lösung der Schrödinger-Gleichung benutze man im linken Teil ($x < 0$) eine Überlagerung von ein- und auslaufender Welle. Im Bereich $0 < x < a$ kommt der bekannte Ansatz für $U < V_0$ zum Einsatz, während im rechten Teil ($x > a$) nur eine auslaufende Welle angesetzt werden soll. Es sei A die Amplitude der von links einlaufenden Wellenfunktion und C die der nach rechts auslaufenden. Zeigen Sie, dass für den Transmissionskoeffizienten (Tunnelwahrscheinlichkeit)

$$T = \frac{|C|^2}{|A|^2} = \frac{1}{\cosh^2(qa) + \frac{1}{4}\left(\frac{q}{k} - \frac{k}{q}\right)^2 \sinh^2(qa)}$$

mit

$$q = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - U)} \quad \text{und} \quad k = \sqrt{\frac{2mU}{\hbar^2}}$$

gilt.

(b) Zeigen Sie zunächst *allgemein*: In einer Dimension ist die Wahrscheinlichkeitsstromdichte j durch

$$j(x) = \text{Re}\left\{\phi^\star(x)\frac{\hat{p}}{m}\phi(x)\right\} \tag{5}$$

gegeben. Mit $\hat{p}$ wird der Impulsoperator bezeichnet; $\phi(x)$ ist eine Lösung der *zeitfreien* Schrödinger-Gleichung.

(c) Berechnen Sie allgemein die zu den Wellenfunktionen

$$\phi_I(x) = A\exp(ikx) \quad , \quad \phi_R(x) = B\exp(-ikx) \quad \text{und} \quad \phi_T(x) = C\exp(ikx) \tag{6}$$

gehörenden Stromdichten j_I, j_R und j_T.

(d) Nutzen Sie nun ihre Ergebnisse aus Teil (a) und bestimmen Sie Transmissions- und Reflexionskoeffizienten im Grenzfall $a \to 0$. Überprüfen Sie die Gültigkeit von

$$j_I + j_R = j_T \quad . \tag{7}$$