



13. Unendlich hoher Potentialkasten

(7 Punkte)

Wir betrachten erneut das in der Vorlesung behandelte Problem eines Teilchens, das in einen unendlich hohen, eindimensionalen Potentialkasten ($0 \leq x \leq a$) eingesperrt ist. Zur Zeit $t = 0$ sei die normierte Wellenfunktion des Teilchens durch

$$\Psi(x, t = 0) = \sqrt{\frac{8}{5a}} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right] \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad (1)$$

gegeben.

- (a) Wie lautet die Wellenfunktion des Teilchens zu einem späteren Zeitpunkt $t = t_0 > 0$?
- (b) Bestimmen Sie die mittlere Energie des Systems zu den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = t_0$.
- (c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen zur Zeit $t = t_0$ in der linken Hälfte der Box anzutreffen (d.h. im Intervall $0 \leq x \leq a/2$)?

14. Endlich hoher Potentialkasten I: Gebundene Zustände

(13 Punkte)

Gegeben sei das Potential

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{für } x < -l \quad \text{(I)} \\ 0 & \text{für } -l \leq x \leq l \quad \text{(II)} \\ V_0 & \text{für } l < x \quad \text{(III)} \end{cases}, \quad V_0 > 0.$$

Es sollen einige Eigenschaften der Lösungen der eindimensionalen, stationären Schrödinger-Gleichung für $0 < U < V_0$ diskutiert werden. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

- (a) Als allgemeine Lösungen in den Bereichen (I)-(III) setze man an:

$$\begin{aligned} \phi_I &= Ae^{qx} + \tilde{A}e^{-qx} \\ \phi_{II} &= Be^{ikx} + Ce^{-ikx} \\ \phi_{III} &= \tilde{D}e^{qx} + De^{-qx} \end{aligned}$$

Bestimmen Sie q und k als Funktion der Energie U . Warum müssen $\tilde{A}$ und $\tilde{D}$ null sein?

- (b) Es lässt sich zeigen, dass an den Unstetigkeitsstellen von $V(x)$ sowohl ϕ als auch $d\phi/dx$ stetig sein müssen. Stellen Sie unter diesen Bedingungen ein Gleichungssystem für A, B, C und D auf.

Bitte wenden →

- (c) Es sollen nun die nichttrivialen Lösungen dieses Gleichungssystems bestimmt werden. Zeigen Sie, dass es genau zwei Arten von solchen Lösungen gibt, und zwar symmetrische und antisymmetrische, *ohne* diese explizit zu bestimmen.
- (d) Zeigen Sie weiterhin, dass für die symmetrischen Lösungen

$$q = k \tan(kl)$$

und für die antisymmetrischen Lösungen

$$q = -k \cot(kl)$$

gelten muss. Zeigen Sie, dass außerdem gilt:

$$q = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} V_0 - k^2} \quad .$$

- (e) Die obigen Bedingungen liefern im Prinzip die Lösungen für die Energieeigenwerte U_n . Jedoch sind die Gleichungen transzendent. Man kann aber einige Eigenschaften aus einer graphischen Lösung ablesen. Begründen Sie mittels dieser graphischen Lösung:
- Es gibt immer mindestens einen und höchstens endlich viele diskrete Energieeigenwerte.
 - Der Zustand mit der niedrigsten Energie ist symmetrisch.
 - Die folgenden Zustände sind immer abwechselnd antisymmetrisch und symmetrisch.