INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

QUANTENMECHANIK — WS 2010/11

4. Übungsblatt — Abgabe: Mo., 22.11.2010 bis 17.00 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

11. **Kommutatoren** **(10 Punkte)**

In dieser Aufgabe soll das Rechnen mit Kommutatoren geübt werden.

(a) Zeigen Sie: Für beliebige Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$ und $\hat{C}$ gilt

$$\big[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}\big] = \big[\hat{A}, \hat{B}\big]\hat{C} + \hat{B}\big[\hat{A}, \hat{C}\big] \quad . \tag{1}$$

(b) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: Für beliebige Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$ und $n = 1, 2, \ldots$ gilt

$$\left[\hat{A}, \hat{B}^n\right] = \sum_{r=0}^{n-1} \hat{B}^r \left[\hat{A}, \hat{B}\right] \hat{B}^{n-r-1} \quad . \tag{2}$$

(c) Sei $\hat{A}$ nun eine Potenzreihe in $\hat{q}_k$ und $\hat{p}_k$. Zeigen Sie

$$[\hat{q}_k, \hat{A}] = i\hbar \partial_{p_k} \hat{A} \quad . \tag{3}$$

(d) Berechnen Sie für die Komponenten des Drehimpulsoperators $\underline{\hat{L}} = \underline{\hat{q}} \times \underline{\hat{p}}$ die folgenden Kommutatoren $(i, j \in \{1, 2, 3\})$:

i. $[\hat{L}_i, \hat{L}_j]$ ii. $[\hat{L}_i, \hat{L}^2]$ iii. $[\hat{L}_i, \hat{p}_j]$

Hinweis: Bei dieser Teilaufgabe können Sie durch Verwendung von Komponentenschreibweise und Summenkonvention *sehr, sehr* viel Schreibarbeit sparen.

12. **Zerfließen eines Wellenpakets** **(10 Punkte)**

Im Skript (Abschnitt II.3) wird für eine Beschreibung, die Teilchen- und Wellenvorstellung vereinen soll, ein Wellenpaket untersucht, wobei die Dispersionsrelation $\omega(k)$ bis zur ersten Ordnung entwickelt wird. Hier soll nun der Einfluss der zweiten Ordnung untersucht werden. Dazu soll die zeitliche Entwicklung der eindimensionalen Wellenfunktion

$$\Psi(x,t) = \int \mathrm{d}k\, A(k) e^{i(kx-\omega(k)t)} \quad \text{mit} \quad \omega(k) = \omega(k_0) + \left.\frac{\partial\omega}{\partial k}\right|_{k=k_0}(k-k_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}\right|_{k=k_0}(k-k_0)^2$$

betrachtet werden.

Bitte wenden ⟶

(a) Für $A(k)$ wird eine Gauß-Verteilung mit Breite Δk angenommen:

$$A(k) = e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2(\Delta k)^2}} \quad .$$

Berechnen Sie $\Psi(x,t)$, indem Sie die k-Integration ausführen. Bestimmen Sie daraus die Materialdichte $|\Psi|^2$. Diese hat wieder die Form einer Gauß-Verteilung im Ortsraum mit Breite $\Delta x(t)$.
Hinweis: Verlangt ist eine Berechnung der auftretenden Integrale ohne Verwendung elektronischer Hilfsmittel.

(b) Bestimmen Sie $\Delta x \cdot \Delta k$ für $t = 0$.

(c) Geben Sie einen Ausdruck für die charakteristische Verbreiterungszeit τ an, in der sich die Breite des Wellenpakets verdoppelt. Die Dispersionsrelation ist durch $\omega(k) = \hbar k^2/(2m)$ gegeben.

(d) Ein Elektron werde zum Zeitpunkt $t = 0$ aus der Elektronenhülle eines Atoms herausgeschlagen. Für das Wellenpaket dieses Elektrons soll eine Breite von 1Å angenommen werden. Bestimmen Sie τ.