



8. Berechnung von Erwartungswerten

(6 Punkte)

Ein Teilchen werde durch die normierte Wellenfunktion

$$\Psi(x) = \begin{cases} 2\alpha\sqrt{\alpha}xe^{-\alpha x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

beschrieben¹.

- (a) Für welches x hat $|\Psi|^2$ sein Maximum?
- (b) Berechnen Sie $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle p \rangle$ und $\langle p^2 \rangle$.
- (c) Die Varianz eines Operators A ist durch

$$\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2} \quad (1)$$

gegeben. Berechnen Sie das Produkt $\Delta x \Delta p$.

- (d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen zwischen $x = 0$ und $x = 1/\alpha$ anzutreffen?

Hinweis: Die auftretenden Integrale können Sie bei Bedarf auch per Computer oder Taschenrechner bestimmen.

9. Kontinuitätsgleichung

(5 Punkte)

In dieser Aufgabe wird die Kontinuitätsgleichung für die Wahrscheinlichkeitsstromdichte diskutiert.

- (a) Gegeben sei zu einem festen $\underline{k}$ die ebene Welle

$$\psi(\underline{x}, t) = A e^{i(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega(k)t)}.$$

- i. Bestimmen Sie $\omega(k)$ so, dass $\psi(\underline{x}, t)$ die Schrödingergleichung für ein freies Teilchen, d.h.

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \quad ,$$

löst.

- ii. Berechnen Sie zu $\psi(\underline{x}, t)$ die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\underline{j}$.

¹Hinweis: Diese Funktion beschreibt einen angeregten Zustand des Elektrons im Wasserstoffatom.

- iii. Überzeugen Sie sich, dass die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $\rho(\underline{x}, t) = |\psi(\underline{x}, t)|^2$ zusammen mit $\underline{j}$ aus Aufgabenteil (ii) die Kontinuitätsgleichung erfüllt.
- (b) Es seien $\Psi_1(\underline{x}, t)$ und $\Psi_2(\underline{x}, t)$ zwei Lösungen der Schrödinger-Gleichung mit dem Hamilton-Operator $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \hat{V}(\underline{x})$ und reellem $\hat{V}$. Beweisen Sie die verallgemeinerte Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Psi_1^* \Psi_2) + \frac{\hbar}{2mi} \nabla \cdot (\Psi_1^* \nabla \Psi_2 - \Psi_2 \nabla \Psi_1^*) = 0 \quad . \quad (2)$$

10. Wellengleichung und Fourier-Transformation

(9 Punkte)

Ziel dieser Aufgabe ist das Lösen der dreidimensionalen Wellengleichung mittels einer Fourier-Transformation. Die Lösungen der dreidimensionalen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}(\underline{r}, t) = c^2 \Delta \Psi(\underline{r}, t)$$

können als Fourier-Integral dargestellt werden:

$$\Psi(\underline{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \hat{\Psi}(\underline{k}, t) e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}} \quad .$$

- (a) Welche gewöhnliche Differentialgleichung erfüllt $\hat{\Psi}(\underline{k}, t)$ für festes $\underline{k}$? Geben Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung an.
- (b) Bestimmen Sie nun $\Psi(\underline{r}, t)$. Schreiben Sie die Lösung für $\Psi(\underline{r}, t)$ als Funktion von $\underline{k} \cdot \underline{r} \pm \omega_{\underline{k}} t$. Welche Beziehung besteht zwischen $\omega_{\underline{k}}$ und $\underline{k}$?
- (c) Als Anfangsbedingung sei ein Gaußsches Wellenpaket gegeben:

$$\Psi(\underline{r} = (x, y, z), t = 0) = \Psi_0 e^{-\alpha x^2/2} \quad , \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t}(\underline{r}, 0) = 0 \quad .$$

Arbeiten Sie nun mittels der Fouriertransformation diese Anfangsbedingungen in die allgemeine Lösung aus (a) ein. Die Fourier-Transformierte der eindimensionalen Gauß-Funktion darf dabei *ohne Herleitung* aus Tabellenwerken entnommen werden. Geben Sie schließlich die zugehörige Lösung $\Psi(\underline{r}, t)$ der dreidimensionalen Wellengleichung als Integral an.