INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

QUANTENMECHANIK — WS 2010/11

2. Übungsblatt — Abgabe: Mo., 08.11.2010 bis 17.00 Uhr im Kasten vor A317

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

5. **Separationsansatz für die Laplace-Gleichung** **(7 + 5 Punkte)**

Lösen Sie die Laplace-Gleichung $\Delta\Phi(\underline{r}) = 0$ im Gebiet

$$\mathcal{G} = \{\, \underline{r} = (x_1, x_2) \mid 0 \leq x_1 \leq a\,;\, 0 \leq x_2 \leq b \,\} \tag{1}$$

mit Hilfe eines Separationsansatzes unter den folgenden Randbedingungen:

$$\Phi(0, x_2) = \Phi(a, x_2) = 0 \quad ; \quad \Phi(x_1, 0) = 0 \quad ; \quad \Phi(x_1, b) = A_0 + B_0 \sin\left(\frac{3\pi}{a} x_1\right) \quad .$$

Stellen Sie dazu den Laplace-Operator in kartesischen Koordinaten auf und verwenden Sie den Ansatz $\Phi(x_1, x_2) = U_n(x_1)W_n(x_2)$. Zeigen Sie, dass $U_n(x_1)$ und $W_n(x_2)$ gewöhnliche Differentialgleichungen erfüllen und lösen Sie diese allgemein. Verwenden Sie die ersten drei Randbedingungen und zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung dann die Form

$$\Phi(x_1, x_2) = \sum_n U_n(x_1)W_n(x_2) = \sum_n a_n \sin(k_n x_1) \sinh(k_n x_2)$$

annimmt. Um die 5 Zusatzpunkte zu erhalten, können Sie nun mit Hilfe der letzten Randbedingung die a_n bestimmen. Nutzen Sie dazu die Orthogonalitätsrelationen für die trigonometrischen Funktionen $S_n = \sin(nx)$ und $C_n = \cos(mx)$:

$$\begin{aligned}
\langle S_n \,|\, S_m \rangle &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{d}x\, \sin(nx)\sin(mx) = \delta_{n,m} \qquad (m, n = 1, 2, \ldots) \quad ; \\
\langle C_n \,|\, C_m \rangle &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{d}x\, \cos(nx)\cos(mx) = \delta_{n,m} \qquad (m, n = 1, 2, \ldots) \quad ; \\
\langle S_n \,|\, C_m \rangle &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{d}x\, \sin(nx)\cos(mx) = 0 \qquad (m, n = 1, 2, \ldots) \quad .
\end{aligned}$$

6. **Diracsche δ-Funktion** **(5 Punkte)**

Wir betrachten die Abbildung δ_{x_0}, die auf (stetige) reelle Funktionen f einer reellen Variablen wie folgt wirkt:

$$\delta_{x_0}[f] := f(x_0).$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$d_l(x) := \begin{cases} 1/l & ; \quad -l/2 \leq x \leq l/2 \\ 0 & ; \quad \text{sonst} \end{cases}$$

normiert sind (d.h., $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, d_l(x) = 1$) und berechnen Sie das Faltungsintegral

$$d_l\,[f] := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, d_l(x - x_0) f(x) \quad ,$$

wobei f eine beliebige, reelle Testfunktion ist. Was erhalten Sie im Grenzfall $\lim_{l\to 0} d_l\,[f]$? Skizzieren Sie $d_l(x)$ für $l = 1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots$.
Hinweis: Verwenden Sie den Mittelwertsatz der Integralrechnung.

(b) Für die Diracsche δ-Funktion wird üblicherweise die Schreibweise

$$\delta_{x_0}\,[f] := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta(x - x_0) f(x)$$

verwendet. In drei Dimensionen definieren wir die δ-Funktion über:

$$\delta(\underline{r}) := \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3) \quad ; \quad \underline{r} = (x_1, x_2, x_3) \quad .$$

Berechnen Sie:

i. $\int \mathrm{d}V\, \underline{r}\, \rho(\underline{r})$ mit $\rho(\underline{r}) = \sum_{i=1}^{N} \delta(\underline{r} - \underline{r}_i)$; $V = \mathbb{R}^3$.
ii. $\int \mathrm{d}V\, e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}\, \delta(\underline{r})$; $V = \mathbb{R}^3$ (Fouriertransformation der δ-Funktion).

7. **Fourier-Transformation** **(5 Punkte)**

Die Fourier-Transformation $\hat{f}$ einer Funktion f ist in Dimension s definiert als

$$\hat{f}(\underline{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{s/2}} \int \mathrm{d}^s x\, f(\underline{x})\, \mathrm{e}^{-i\underline{k}\cdot\underline{x}} \quad .$$

Ferner ist die Faltung $f * g$ zweier Funktionen f und g definiert über

$$(f * g)(\underline{y}) = \int \mathrm{d}^s x\, f(\underline{x})\, g(\underline{y} - \underline{x}) \quad .$$

(a) Sukzessives Anwenden von Fouriertransformation und Rücktransformation auf $f(x)$ sollte wieder auf $f(x)$ führen. Überprüfen Sie diese Aussage.

(b) Nehmen Sie an, dass Sie Integrale und Ableitungen vertauschen dürfen und verifizieren Sie folgende Aussagen für $s = 1$:

i. Faltungssatz:

$$\widehat{(f * g)}(k) = \sqrt{2\pi}\, \hat{f}(k)\, \hat{g}(k) \quad ,$$

ii. Differentiationssatz:

$$\widehat{(x\, f)}(k) = i\, \frac{\mathrm{d}\hat{f}}{\mathrm{d}k} \quad .$$