



3. Lineare Algebra

(7 Punkte)

In dieser Aufgabe sollen einige Grundbegriffe wiederholt werden.

(a) Wir betrachten eine Menge von Vektoren des $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{M} = \{(1, 1, 0), (-2, 1, \lambda), (0, -1, -2)\} \quad . \quad (1)$$

- Zeigen Sie, daß die Elemente von $\mathcal{M}$ für $\lambda \neq 6$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.
- Stellen Sie für $\lambda = 5$ den Vektor $\underline{a} = (2, 2, -1)$ als Linearkombination der Elemente von $\mathcal{M}$ dar.
- Für welche Werte von $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ bildet selbst die Menge von vier Vektoren

$$\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \cup \{(\lambda, 8, \mu)\} \quad (2)$$

kein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$?

(b) Wir betrachten die Matrix

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad . \quad (3)$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren von $\underline{\underline{A}}$. Geben Sie außerdem eine unitäre 3×3 -Matrix $\underline{\underline{U}}$ an, die $\underline{\underline{A}}$ auf Diagonalgestalt transformiert. Das bedeutet: $\underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{U}}^+$ darf nur Diagonalelemente enthalten. Die zu $\underline{\underline{U}}$ adjungierte Matrix $\underline{\underline{U}}^+$ ist durch $\underline{\underline{U}}^+ = (\underline{\underline{U}}^T)^*$ definiert, d.h. $\underline{\underline{U}}$ wird transponiert und dann die Matricelemente komplex konjugiert.

4. Die Matrix-Exponentialfunktion

(8 Punkte)

Für eine quadratische Matrix $\underline{\underline{A}}$ definieren wir den Ausdruck $\exp(\underline{\underline{A}})$ als Potenzreihe:

$$\exp(\underline{\underline{A}}) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underline{\underline{A}}^k \quad . \quad (4)$$

Bitte wenden $\longrightarrow$

- (a) Zeigen Sie: Vertauschen die beiden Matrizen $\underline{\underline{A}}$ und $\underline{\underline{B}}$ miteinander, d.h. ist $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$, so gilt das Additionstheorem

$$\exp(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) = \exp(\underline{\underline{A}}) \cdot \exp(\underline{\underline{B}}) \quad . \quad (5)$$

- (b) Wir betrachten eine spurfreie Matrix

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad . \quad (6)$$

Dann ist $\underline{\underline{A}}$ ist diagonalisierbar, d.h. es existiert eine invertierbare Matrix $\underline{\underline{S}} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, so dass

$$\underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{D}} \quad (7)$$

eine Diagonalmatrix ist. Zeigen Sie zunächst:

$$\exp(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{S}} \cdot \exp(\underline{\underline{D}}) \cdot \underline{\underline{S}}^{-1} \quad . \quad (8)$$

Überlegen Sie sich dann, wie man $\exp(\underline{\underline{D}})$ für Diagonalmatrizen $\underline{\underline{D}}$ berechnet.

- (c) Nutzen Sie ihre Überlegungen aus (b) und zeigen Sie:

$$\exp(\underline{\underline{A}}) = \begin{cases} \cosh(w) \underline{\underline{1}} + \frac{\sinh(w)}{w} \underline{\underline{A}} & \text{für } \det \underline{\underline{A}} < 0 \\ \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{A}} & \text{für } \det \underline{\underline{A}} = 0 \\ \cos(w) \underline{\underline{1}} + \frac{\sin(w)}{w} \underline{\underline{A}} & \text{für } \det \underline{\underline{A}} > 0 \end{cases} \quad (9)$$

mit

$$w = \sqrt{|\det \underline{\underline{A}}|} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad . \quad (10)$$

- (d) Das Ergebnis aus (c) lässt sich auch auf eine allgemeine 2×2 -Matrix $\underline{\underline{B}}$ übertragen. Schreiben Sie dazu $\underline{\underline{B}}$ als

$$\underline{\underline{B}} = \xi \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{A}}_0 \quad (11)$$

mit $\xi \in \mathbb{R}$ und einer spurfreien Matrix $\underline{\underline{A}}_0$.

- (e) Machen Sie sich klar, daß die Lösung eines Differentialgleichungssystems $\dot{\underline{\underline{r}}} = \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{r}}$ in der Form

$$\underline{\underline{r}}(t) = \exp(t \underline{\underline{C}}) \cdot \underline{\underline{r}}(t=0) \quad (12)$$

geschrieben werden kann.

Klausurtermin (vorläufig): 12. Februar 2011

Teilnahmevoraussetzungen: 50 % der Hausaufgabenpunkte. Zusätzlich muss in den Übungen zweimal eine Aufgabe erfolgreich vorgerechnet werden. Es besteht jedoch keine Anwesenheitspflicht in den Übungen.

Fragen an:

Hendrik Kriegel	h.kriegel@tu-bs.de	Raum A 317
Boris Celan	bcelan@hotmail.com	
Christoph Stahl	c.stahl@tu-bs.de	