INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. U. Motschmann
Dipl.-Phys. H. Kriegel

QUANTENMECHANIK — WS 2010/11

0. Übungsblatt — Präsenzübung

Fragen zu den Aufgaben: H. Kriegel, Raum A317, Tel.: 391-5187, h.kriegel@tu-bs.de

http://www.tu-braunschweig.de/theophys/edu/wise-1011/qm1011

1. **Bohrsche Quantisierung: Eindimensionaler harmonischer Oszillator**

Betrachten Sie den eindimensionalen harmonischen Oszillator, d.h. einen Massenpunkt m, der sich im Potential $V(q) = \frac{k}{2}q^2$ bewegt.

(a) Zeigen Sie, daß die Hamilton-Funktion durch $H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2$ gegeben ist. Stellen Sie die kanonischen Gleichungen auf und zeigen Sie, daß diese zur Lagrange-Bewegungsgleichung äquivalent sind.

(b) Bestimmen Sie für dieses System das Phasenraumintegral

$$J = \oint p \, \mathrm{d}q \tag{1}$$

über eine volle Periode.

(c) Die *Bohr-Sommerfeldsche Quantisierungsbedingung* besagt, daß für periodische Bewegungen $J = nh$ gilt, wobei h das Planck'sche Wirkungsquantum und $n = 0, 1, 2, \ldots$ eine natürliche Zahl ist. Wenden Sie die Bohrsche Quantisierungsregel auf den harmonischen Oszillator an. Berechnen Sie die Energie der quantisierten Bahnen.

(d) Stellen Sie die Hamilton-Jacobi-Gleichung für den harmonischen Oszillator auf. Begründen Sie: Für die Wirkungsfunktion $S(q,t)$ gilt

$$S(q,t) = W(q) - \alpha t \quad . \tag{2}$$

Geben Sie insbesondere die Konstante α an.

(e) Begründen Sie: Für das Phasenraumintegral J aus Teilaufgabe (b) gilt

$$J = \oint \frac{\partial W}{\partial q} \, \mathrm{d}q \quad . \tag{3}$$

Bestimmen Sie aus dieser Gleichung erneut den Wert von J.
Hinweis: Integrale vom Typ

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, \mathrm{d}x \tag{4}$$

löst man mit der Substitution $x = a \sin \xi$.

2. **Poisson-Klammern**

Es seien $A = A(\underline{q}, \underline{p}, t)$ und $B = B(\underline{q}, \underline{p}, t)$ zwei Funktionen der generalisierten Koordinaten $\underline{q} = (q_1, \ldots, q_f)$, der generalisierten Impulse $\underline{p} = (p_1, \ldots, p_f)$ und der Zeit. Dann ist die Poisson-Klammer $\{A, B\}$ von A und B durch

$$\{A, B\} = \sum_{\beta=1}^{f} \left(\frac{\partial A}{\partial q_\beta} \frac{\partial B}{\partial p_\beta} - \frac{\partial A}{\partial p_\beta} \frac{\partial B}{\partial q_\beta} \right) \tag{5}$$

definiert.

(a) Zeigen Sie, daß sich die kanonischen Bewegungsgleichungen in der Form

$$\dot{q}_\alpha = \{q_\alpha, H\} \quad \text{und} \quad \dot{p}_\alpha = \{p_\alpha, H\} \tag{6}$$

schreiben lassen. Mit H wird die Hamilton-Funktion bezeichnet.

(b) Es sei $\underline{L} = (L_1, L_2, L_3)$ der dreidimensionale Drehimpulsvektor, (q_1, q_2, q_3) der kartesische Ortsvektor und (p_1, p_2, p_3) der kanonisch konjugierte Impulsvektor. Zeigen Sie folgende Beziehungen für die Poisson-Klammern:

i. $\{L_i, q_j\} = \epsilon_{ijk} q_k$

ii. $\{L_i, p_j\} = \epsilon_{ijk} p_k$

iii. $\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k$.

Klausurtermin (vorläufig): 12. Februar 2011

Teilnahmevoraussetzungen: 50 % der Hausaufgabenpunkte. Zusätzlich muss in den Übungen zweimal eine Aufgabe erfolgreich vorgerechnet werden. Es besteht jedoch keine Anwesenheitspflicht in den Übungen.

Fragen an:

Hendrik Kriegel	h.kriegel@tu-bs.de	Raum A 317
Boris Celan	bcelan@hotmail.com	Raum A 225
Christoph Stahl	c.stahl@tu-bs.de	

Link:

http://www.tu-braunschweig.de/theophys/edu/wise-1011/qm1011