INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dr. A. Honecker

QUANTENMECHANIK WS 2004/2005

Vorbereitung auf die 2. Klausur

1. Folgendes sollten Sie wissen:
   (a) Vertauschungsrelationen und Spektrum des Drehimpulses $\vec{J}$.
   (b) Wie lautet die Kugelflächenfunktion $Y_{0,0}(\theta,\phi)$ (einschließlich Normierung) ?
   (c) Wie hängt die Kugelflächenfunktion $Y_{l,m}(\theta,\phi)$ von dem Winkel ϕ ab ?
   (d) Wie lautet die θ-Abhängigkeit von $Y_{1,m}(\theta,\phi)$ ($l=1$ – ohne Normierung) ?
   (e) Wie verhält sich $Y_{l,m}(\theta,\phi)$ unter Spiegelung am Ursprung $\theta \to \pi-\theta$, $\phi \to \phi+\pi$?
   (f) Wie wirken L_z und $\vec{L}^2$ auf die Kugelflächenfunktionen $Y_{l,m}(\theta,\phi)$?
   (g) Wie löst man die stationäre Schrödingergleichung mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes ?
   (h) Die Formeln für zeitunabhängige Störungstheorie bis zur zweiten Ordnung.
   (i) Die Formeln für zeitabhängige Störungstheorie erster Ordnung.
   (j) Die Struktur höherer Ordnungen in zeitabhängiger Störungstheorie.
   (k) Die Formel der *Born*schen Näherung für die Streuung an einem Potential $W(\vec{r})$.
   (l) Wie geht man vor, um bei der Kopplung zweier Drehimpulse der Länge j_1, j_2 die normierte Basis $|j_1,j_2,j,m\rangle$ zum Gesamtdrehimpuls durch die Zustände $|j_1,j_2,m_1,m_2\rangle$ auszudrücken ?
   (m) Wie schreibt man Ausdrücke vom Typ $\vec{J}_1\cdot\vec{J}_2$ in den Gesamtdrehimpuls $\vec{J}=\vec{J}_1+\vec{J}_2$ um ?
   (n) Spektrum des dreidimensionalen kugelsymmetrischen harmonischen Oszillators.
   (o) Spektrum des Wasserstoffatoms (einschließlich Entartung und Wert des Vorfaktors) ohne relativistische Korrekturen (wie z.B. den Spin).
   (p) Grundzustandswellenfunktion des Wasserstoffatoms in Ortsdarstellung.
   (q) Aufspaltung der Niveaus im Spektrum des Wasserstoffatoms bei Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung.

2. Der Hamilton-Operator des Wassterstoffatoms lautet

$$H=\frac{\vec{p}^2}{2m}-\frac{e^2}{r}$$

($r^2=\vec{r}^2$). Mit dem Ansatz $\Psi(\vec{r})=\phi_l(r)\,Y_{l,m}(\theta,\phi)$ nimmt die radiale Schrödingergleichung folgende Form an:

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}-\frac{l(l+1)}{r^2}+\frac{2}{r\,r_0}+\frac{2mE}{\hbar^2}\right)\phi_l(r)=0\,. \qquad (1)$$

Hierbei ist der *Bohr*sche Radius

$$r_0 = \frac{\hbar^2}{m\,e^2}\,.$$

Gesucht sind im folgenden gebundene Lösungen für $E < 0$.

(a) Für $r \to \infty$ sind die relevanten Terme der Gleichung (1):

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\right)\phi_l(r) = 0\,.$$

Geben Sie die beiden Lösungen dieser Gleichung an !

(b) Motiviert durch das Ergebnis aus Aufgabenteil (a) und einer Analyse des Verhaltens bei $r \to 0$ machen wir folgenden Potenzreihenansatz für die Lösung von (1):

$$\phi_l(q) = \mathrm{e}^{-q}\,q^l \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,q^k \tag{2}$$

mit $q = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}\,r$. Setzen Sie diesen Ansatz in die radiale Schrödingergleichung ein und leiten Sie durch Vergleich der Koeffizienten gleicher q-Potenzen eine Rekursionsrelation für die Koeffizienten a_k her !

(c) Begründen Sie kurz, warum die Potenzreihe (2) abbrechen muß, d.h. $a_k = 0$ für $k > k_0$!

(d) Zeigen Sie, daß aus der Abbruchbedingung $a_k = 0$ für $k > k_0$, $a_{k_0} \neq 0$ für die Energie eines gebundenen Zustandes folgt (mit der Hauptquantenzahl $n = k_0 + l + 1$):

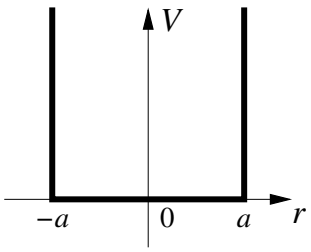
$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2m\,r_0^2\,n^2} \qquad !$$

(e) Zeigen Sie, daß die Potenzreihe (2) für $n = 1$ auf die normierte Grundzustandswellenfunktion

$$\Psi_0(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi\,r_0^3}}\,\mathrm{e}^{-r/r_0}$$

führt !
Hinweis: $\int_0^\infty \mathrm{d}x\,x^2\,\mathrm{e}^{-Ax} = 2/A^3$ für $A > 0$.

3. Wir betrachten ein Teilchen in dem folgenden eindimensionalen Potentialtopf,



d.h.

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + V(r)$$

mit

$$V(r) = \begin{cases} \infty & \text{für } |r| > a, \\ 0 & \text{für } |r| < a. \end{cases}$$

Die Eigenwerte von H_0 sind

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\,\left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2$$

mit $n = 1, 2, \ldots$. Die zugehörigen normierten Eigenfunktionen lauten

$$\psi_n(r) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{n\pi r}{2a}\right) \qquad \text{bzw.} \qquad \psi_n(r) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{n\pi r}{2a}\right)$$

für ungerade n bzw. gerade n.
Weiterhin werde eine konstante Kraft als Störung

$$W(r) = \lambda\, r$$

angelegt.
Zeigen Sie unter Verwendung zeitunabhängiger Störungstheorie zweiter Ordnung, daß die Grundzustandsenergie bis zur zweiten Ordnung in λ wie folgt lautet:

$$E_{\mathrm{GS}} = \frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2} - \lambda^2\, \frac{a^4 m}{\hbar^2} \left(\frac{10}{\pi^4} - \frac{2}{3\pi^2}\right) + \mathcal{O}(\lambda^3) \qquad !$$

Hinweise:

$$\int_{-a}^{a} \mathrm{d}r\, \sin\left(\frac{n\pi r}{a}\right)\, r\, \cos\left(\frac{\pi r}{2a}\right) = (-1)^{n+1} \frac{32a^2 n}{\pi^2 (2n+1)^2 (2n-1)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n+1)^5 (2n-1)^5} = \frac{5\pi^2 - \pi^4/3}{2^{12}}\,.$$

4. An den Potentialtopf der vorhergehenden Aufgabe werde nun eine zeitabhängige Störung angelegt:

$$W(r,t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0, \\ \mathrm{e}^{-t/T}\, f(r) & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

   (a) Das System befinde sich für $t < 0$ im Grundzustand, d.h. $c_1(t_0 = 0) = 1$, $c_n(t_0 = 0) = 0$ für $n > 1$. Die Störung habe ferner die Form $f(r) = \lambda\, r$. Berechnen Sie mit Hilfe zeitabhängiger Störungstheorie erster Ordnung, die Wahrscheinlichkeit $|c_2(t)|^2$, das System für $t > 0$ im ersten angeregten Zustand vorzufinden !
   Hinweis: $\int_{-a}^{a} \mathrm{d}r\, \sin\left(\frac{\pi r}{a}\right)\, r\, \cos\left(\frac{\pi r}{2a}\right) = \frac{32\, a^2}{9\, \pi^2}$.

   (b) Diskutieren Sie für die Störungen
      i. $f(r) = \lambda\, r$,
      ii. $f(r) = \lambda\, r^2$,

   in welcher Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie ein Übergang aus dem Grundzustand ($\sim \cos\left(\frac{\pi r}{2a}\right)$) in den ersten ($\sim \sin\left(\frac{\pi r}{a}\right)$) bzw. zweiten ($\sim \cos\left(\frac{3\pi r}{2a}\right)$) angeregten Zustand induziert werden kann !
   Hinweis: Rechnen Sie nicht – achten Sie auf Symmetrien !

5. Wir koppeln zwei kommutierende Drehimpulse $\vec{J}_1$, $\vec{J}_2$ ($[J_1^\alpha, J_2^\beta] = 0$) mit $j_1 = 2$ und $j_2 = 1/2$ (Drehimpuls 2 bzw. 1/2). Drücken Sie die normierte Basis $|2, 1/2, j, m\rangle$ durch die Zustände $|2, 1/2, m_1, m_2\rangle$ aus !

Beachten Sie von den bisherigen Aufgaben insbesondere auch:
H9.1, A10.1, H10.1, A11.1, H11.1, A12.1, A12.2, H12.1, H12.2.
(AB.n und HB.n sind die nte Anwesenheits- (A) bzw. Haus-Aufgabe (H) auf Blatt Nr. B).

Zur Erinnerung: Die 2. Klausur wird am Samstag, den 12.02.2005 von 09:00 bis 11:00 in PK 15.1 (Physik-Hörsaal, Zentralbereich) geschrieben. Kommen Sie pünktlich, damit Sie die zur Verfügung stehende Zeit vollständig ausnutzen können !