INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dr. A. Honecker

QUANTENMECHANIK WS 2004/2005

Vorbereitung auf die 1. Klausur

1. Folgendes sollten Sie wissen:

   (a) Bohrsche Quantisierungsbedingung für $J = \oint p \, \mathrm{d}q$.

   (b) Zahlenwert und Dimension von $\hbar$.

   (c) Zusammenhang zwischen Impuls und Wellenvektor ($p = \hbar k$).

   (d) Zeitabhängige Schrödingergleichung (darstellungsfrei und in Ortsdarstellung).

   (e) Stationäre Schrödingergleichung (darstellungsfrei und in Ortsdarstellung). Wie kommt man von der zeitabhängigen Schrödingergleichung hierhin ?

   (f) Definition des Wahrscheinlichkeitsstromes und Kontinuitätsgleichung.

   (g) Aussage des Ehrenfestschen Theorems und des Korrespondenzprinzips.

   (h) Anschlussbedingungen für die Schrödingergleichung: Wie sehen die aus, und warum werden sie so angesetzt ?

   (i) Aussage des Knotensatzes.

   (j) Heisenbergsche Vertauschungsrelationen für $[\hat{p}_k, \hat{r}_l]$.

   (k) Orts- und Impuls-Darstellung von $\hat{p}$ und $\hat{r}$.

   (l) Quantenmechanischer Meßprozeß.

   (m) Heisenbergsche Unschärferelation für p und r.

   (n) Verallgemeinerte Unschärferelation für zwei hermitesche Operatoren A und B. Wie beweist man die ? Wann wird die Unschärfe der simultanen Messung von A und B minimal ?

   (o) Was kann man über das Eigenwertproblem zweier kommutierender Größen A und B sagen ? In wieweit hilft das bei der Diagonalisierung eines konkreten Problems ?

   (p) Vertauschungsrelationen von Auf- und Absteigern $\hat{a}^\dagger$, $\hat{a}$ und Zusammenhang zum Spektrum des harmonischen Oszillators.

   (q) Grundzustandswellenfunktion des harmonischen Oszillators und Eigenschaften der angeregten Zustände in Ortsdarstellung.

2. In der Chip-Herstellung werden aktuell Strukturen im Bereich von 100 nm verwendet. Schätzen Sie mit Hilfe der Heisenbergschen Unschärferelation ab, wie genau die Geschwindigkeit eines sich in einer solchen Struktur bewegenden Elektrons maximal bestimmt werden kann !
   Hinweis: Verwenden Sie zur Abschätzung die freie Elektron-Masse m_e, auch wenn die Anwendung auf einen Festkörper kritisch zu sehen ist. Einige nützliche Zahlenwerte sind: $\hbar = 6.5822 \cdot 10^{-16}$ eV s, $m_e = 0.511$ MeV$/c^2$, $c = 2.998 \cdot 10^8$ m/s.

3. Der Hamilton-Operator des eindimensionalen harmonischen Oszillators ist gegeben durch:
$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 .$$
Klassisch sind die periodischen Bahnen gegeben durch
$$r(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \alpha) .$$
Führen Sie die Bohrsche Quantisierung aus und bestimmen Sie die erlaubten Energien ! Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem der vollständingen quantenmechanischen Behandlung !

4. Wir betrachten einen eindimensionalen Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden bei $r = \pm a$, d.h.
$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{für } |r| < a, \\ \infty & \text{für } |r| > a. \end{cases}$$
   (a) Wie sehen die klassischen Bahnen mit Energie E aus ?
   (b) Berechnen Sie die erlaubten Energieniveaus E_n in Bohrscher Quantisierung !
   (c) Bestimmen Sie die Wellenfunktionen $\psi_n(r)$ und Energieniveaus E_n, indem Sie die stationäre Schrödingergleichung für dieses Problem lösen !
   (d) Vergleichen Sie die Ergebnisse für E_n aus (b) und (c) ! Diskutieren Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeit am Punkt $r < |a|$ im klassischen (a) und quantenmechanischen Bild (c) !

5. Wir betrachten ein freies Teilchen neben einer unendlich hohen Wand in einer Dimension, d.h.
$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(r)$$
mit
$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{für } r < 0, \\ \infty & \text{für } r > 0. \end{cases}$$
   (a) Berechnen Sie die Lösung $\psi_E(r)$ der stationären Schrödingergleichung zu Energie E !
   (b) Berechnen Sie zu $\psi_E(r)$ die Wahrscheinlichkeitsstromdichte j !
   (c) Wie lautet die Kontinuitätsgleichung für Aufenthaltswahrscheinlichkeit ρ und Wahrscheinlichkeitsstromdichte j ? Ist diese im vorliegenden Fall erfüllt ?

6. Berechnen Sie $[\hat{p}, \hat{r}^{47}]$!

7. (a) Der zu A adjungierte Operator $A^\dagger$ erfüllt $\langle b|\ A\,|a\rangle = \langle a|\ A^\dagger\,|b\rangle^\star$. Wie lautet $(AB)^\dagger$?
   (b) Seien A und B zwei Observable, d.h. hermitesche Operatoren ($A^\dagger = A$, $B^\dagger = B$). Wann ist das Produkt AB eine Observable ?

8. Gegeben sei ein zwei-Zustands-System, dessen Wellenfunktion durch einen Vektor $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$ beschrieben wird. Das System werde präpariert in dem Zustand
$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$
Die Zeitentwicklung wird im folgenden als trivial angenommen ($\hat{H} = 0$).

(a) In einer ersten Messung werde bestimmt, ob sich das System im Zustand

$$|\,1\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

befindet. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, das System bei dieser Messung im Zustand $|\,1\rangle$ zu finden ! Wie lautet der Zustand des Systems nach dieser Messung ?

(b) In einer zweiten Messung werde nun getestet, ob sich das System noch im ursprünglichen Zustand $|\,0\rangle$ befindet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer solchen zweiten Messung den Zustand $|\,0\rangle$ vorzufinden (falls Sie an Teilchen denken, schränken Sie Ihre Betrachtung auf solche Teilchen ein, die nach der ersten Messung noch vorhanden sind) ?

9. Der Hamilton-Operator des harmonischen Oszillators kann mit

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\mathcal{C}\,\hat{r} - \frac{i}{\mathcal{C}}\,\hat{p}\right)\,, \qquad \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\mathcal{C}\,\hat{r} + \frac{i}{\mathcal{C}}\,\hat{p}\right)$$

und $\mathcal{C} = \sqrt{m\omega}$ als

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$$

dargestellt werden. Die normierten Eigenfunktionen seien mit $|\,n\rangle$ bezeichnet, d.h. $\hat{H}\,|\,n\rangle \;=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)|\,n\rangle$.

(a) Berechnen Sie

$$\langle n|\;\hat{p}\;|\,n\rangle\;, \qquad \langle n|\;\hat{x}\;|\,n\rangle \qquad !$$

An welche allgemeine Aussage für gebundene Zustände erinnert Sie das Ergebnis ?

(b) Zeigen Sie

$$\left[\hat{a}, \mathrm{e}^{\lambda\hat{a}^\dagger}\right] = \lambda\,\mathrm{e}^{\lambda\hat{a}^\dagger} \qquad !$$

(c) Sei nun $|\,\lambda\rangle$ der folgende Zustand:

$$|\,\lambda\rangle \;= C_\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda\hat{a}^\dagger}\;|\,0\rangle$$

mit $\lambda\in\mathbb{C}$ (ebenso $C_\lambda\in\mathbb{C}$). Zeigen Sie:

$$\frac{\langle\lambda|\;\hat{p}\;|\,\lambda\rangle}{\langle\lambda|\,\lambda\rangle} = \sqrt{2\hbar}\,\mathcal{C}\,\Im\mathrm{m}\lambda \qquad \text{und} \qquad \frac{\langle\lambda|\;\hat{r}\;|\,\lambda\rangle}{\langle\lambda|\,\lambda\rangle} = \frac{\sqrt{2\hbar}}{\mathcal{C}}\,\Re\mathrm{e}\lambda \qquad !$$

Beachten Sie von den bisherigen Aufgaben insbesondere auch:
A1.1, A3.1, H3.1, H3.2, A4.1, A6.1, A6.2, H6.1, H6.2, A7.1, A7.2, H7.1.
(AB.n und HB.n sind die nte Anwesenheits- (A) bzw. Haus-Aufgabe (H) auf Blatt Nr. B).

Zur Erinnerung: Die 1. Klausur wird am Samstag, den 18.12.2004 von 09:00 bis 11:00 in PK 15.1 (Physik-Hörsaal, Zentralbereich) geschrieben. Bitte kommen Sie pünktlich, damit Sie die zur Verfügung stehende Zeit vollständig ausnutzen können !