



Anwesenheitsübung (keine Abgabe)

A1. Wir koppeln zwei Drehimpulse \vec{J}_1, \vec{J}_2 mit $j_1 = 3/2, j_2 = 1/2$. Drücken Sie die normierten Zustände $|3/2, 1/2, j = 2, m = 2\rangle, |3/2, 1/2, j = 2, m = 1\rangle$ und $|3/2, 1/2, j = 1, m = 1\rangle$ durch die Zustände $|3/2, 1/2, m_1, m_2\rangle$ aus!

Anders ausgedrückt: Berechnen Sie die *Clebsch-Gordan* Koeffizienten $\langle \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, m_1 = \frac{3}{2}, m_2 = \frac{1}{2} | \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, j = 2, m = 2 \rangle, \langle \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, m_1 = \frac{1}{2}, m_2 = \frac{1}{2} | \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, j = 2, m = 1 \rangle, \langle \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, m_1 = \frac{3}{2}, m_2 = -\frac{1}{2} | \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, j = 2, m = 1 \rangle, \langle \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, m_1 = \frac{1}{2}, m_2 = \frac{1}{2} | \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, j = 1, m = 1 \rangle$ und $\langle \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, m_1 = \frac{3}{2}, m_2 = -\frac{1}{2} | \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, j = 1, m = 1 \rangle$!

Hinweis: Gehen Sie wie folgt vor:

- $|3/2, 1/2, j = 2, m = 2\rangle = |3/2, 1/2, m_1 = 3/2, m_2 = 1/2\rangle$ (warum?).
- Die Zustände $|3/2, 1/2, j = 2, m\rangle$ können durch Anwendung von J^- konstruiert werden, wobei

$$J^- |j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} |j, m-1\rangle.$$

- Der Zustand $|3/2, 1/2, j = 1, m = 1\rangle$ wird so gewählt, daß er orthonormal zu $|3/2, 1/2, j = 2, m = 1\rangle$ ist.

A2. Die Kopplung zweier Spins \vec{S}_1 und \vec{S}_2 der Länge s_1 bzw. s_2 sei durch den Hamilton-Operator

$$H = A \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$$

beschrieben.

- Drücken Sie H durch den Gesamtspin $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ aus!
- Wir betrachten nun den Fall $s_1 = s_2 = 1$ etwas genauer. Welche Eigenwerte von H treten in diesem Fall auf und wie oft sind sie entartet?

Hinweis: Für $s_1 = s_2 = 1$ ist H eine Matrix der Dimension $(2s_1+1)(2s_2+1) = 3^2 = 9$.

Hausaufgaben

H1. Wir koppeln zwei Drehimpulse \vec{J}_1, \vec{J}_2 mit $j_1 = j_2 = 1$ (Drehimpuls 1). Drücken Sie die normierte Basis $|1, 1, j, m\rangle$ durch die Zustände $|1, 1, m_1, m_2\rangle$ aus !

Hinweis: Gehen Sie wie folgt vor:

- i. $|1, 1, j = 2, m = 2\rangle = |1, 1, m_1 = 1, m_2 = 1\rangle$ (warum ?).
- ii. Die Zustände $|1, 1, j = 2, m\rangle$ werden durch Anwendung von J^- konstruiert. (Dabei sind evtl. die in der Vorlesung angegebenen Rekursionsformeln für die *Clebsch-Gordan* Koeffizienten $\langle j_1, j_2, j, m | j_1, j_2, m_1, m_2\rangle$ nützlich.)
- iii. Der Zustand $|1, 1, j = 1, m = 1\rangle$ wird so gewählt, daß er orthonormal zu $|1, 1, j = 2, m = 1\rangle$ ist.

Und so weiter, bis alle Zustände konstruiert sind.

8 Punkte

H2. In einem Proton-Neutron-System treten zwei Spins (\vec{S}_1 und \vec{S}_2) auf sowie ein relativer Bahndrehimpuls \vec{L} . Die Spins von Proton und Neutron sind jeweils $s_1 = s_2 = 1/2$. Der Gesamtdrehimpuls sei

$$\vec{J} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{L}.$$

- (a) Zeigen Sie, daß $\vec{S}^2 = (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2$ und \vec{J}^2 kommutieren !
- (b) Bestimmen Sie, welche j als Eigenwerte $j(j+1)$ von \vec{J}^2 auftreten, wenn der Eigenwert von \vec{L}^2 durch $\ell(\ell+1)$ gegeben ist (d.h. fester Bahndrehimpuls ℓ) ! Wie oft treten in diesem Fall die erlaubten Werte von j auf ?

Hinweis: Im vorliegenden Fall ist es vorteilhaft, zuerst die beiden Spins zu einem Gesamtspin $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ zu koppeln, und erst dann diesen mit \vec{L} zum Gesamtdrehimpuls \vec{J} .

- (c) Wir nehmen nun an, daß das Proton-Neutron-System durch den folgenden Hamilton-Operator beschrieben wird:

$$H = A \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + B \vec{L} \cdot (\vec{S}_1 + \vec{S}_2).$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte von H !

Hinweis: Drücken Sie $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$ durch \vec{S}^2 und dann $\vec{L} \cdot \vec{S}$ durch \vec{J}^2 aus ! Es gibt 4 verschiedene Eigenwerte – wodurch sind diese charakterisiert ?

6 Punkte

Beachten Sie den vorgezogenen Abgabetermin für dieses Aufgabenblatt !

Zur Erinnerung: Die 2. Klausur wird am Samstag, den 12.02.2005 von 09:00 bis 11:00 in PK 15.1 (Physik-Hörsaal, Zentralbereich) geschrieben. Kommen Sie pünktlich, damit Sie die zur Verfügung stehende Zeit vollständig ausnutzen können !