INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dr. A. Honecker

QUANTENMECHANIK WS 2004/2005

11. Übungsblatt Abgabe der **Hausaufgaben** am 1. Februar 2005 bis 14:00

# Anwesenheitsübung (keine Abgabe)

A1. Auf den eindimensionalen harmonischen Oszillator

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 r^2$$

wirke eine zeitabhängige Kraft

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0, \\ F_0 \, \mathrm{e}^{-t/T} & \text{für } t \geq 0. \end{cases}$$

Für $t < 0$ befinde sich der Oszillator in seinem Grundzustand $|0\rangle$ .

(a) Wie lautet das zeitabhängige Potential $W(t)$ ?

(b) Berechnen Sie mit zeitabhängiger Störungstheorie die Wahrscheinlichkeit $p_1(t)$, das System zur Zeit $t > 0$ in seinem ersten angeregten Zustand $|1\rangle$ zu finden !

(c) Zeigen Sie, daß Ihr Ergebnis $p_1(t)$ für große Zeiten $t \gg T$ unabhängig von $t$ wird ! Begründen Sie, warum dies zu erwarten ist.

(d) Können in erster Ordnung auch höhere angeregte Zustände auftreten ? Diskutieren Sie allgemeiner, welche Ordnung Störungstheorie betrachtet werden muß, um den Zustand $|n\rangle$ aus dem Grundzustand anregen zu können !

# Hausaufgaben

H1. Wir betrachten ein System, das wichtige Anwendungen z.B. auf Kernspin-Resonanz und Maser besitzt: Ein Zwei-Niveau-System mit $E_1 < E_2$, bei dem eine zeitabhängige Störung $W(t)$ Übergänge induziert ($\gamma \in \mathbb{R}$):

$$W_{1,1} = W_{2,2} = 0\,, \qquad W_{1,2} = \gamma \, \mathrm{e}^{i\omega t}\,, \qquad W_{2,1} = \gamma \, \mathrm{e}^{-i\omega t}\,.$$

Zur Zeit $t_0 = 0$ sei nur der Zustand mit Energie $E_1$ bevölkert, d.h. $c_1(0) = 1$, $c_2(0) = 0$.

(a) Berechnen Sie $|c_1(t)|^2$ sowie $|c_2(t)|^2$ mittels zeitabhängiger Störungstheorie erster Ordnung !

(b) Wir nehmen hier ohne Beweis zur Kenntnis, daß die exakte Lösung des Problems auf die *Rabi*-Formel

$$|c_2(t)|^2 = \frac{\gamma^2}{\hbar^2 \Omega^2} \sin^2(\Omega t)\,, \qquad |c_1(t)|^2 = 1 - |c_2(t)|^2 \tag{1}$$

führt, mit ($\omega_{2,1} = (E_2 - E_1)/\hbar$)

$$\Omega = \sqrt{\frac{\gamma^2}{\hbar^2} + \frac{(\delta\omega)^2}{4}}\,, \qquad \delta\omega = \omega - \omega_{2,1}\,. \tag{2}$$

Entwickeln Sie (1) und (2) nach $\gamma$ und vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus (a) ! Beachten Sie dabei insbesondere die Fälle $\gamma \gg \hbar\,\delta\omega$ und $\gamma \ll \hbar\,\delta\omega$ !

(c) Skizzieren Sie $|c_1(t)|^2$ und $|c_2(t)|^2$ nach (1) im Spezialfall $\omega = \omega_{2,1}$ (Resonanz) ! Diskutieren Sie das Bild kurz unter Berücksichtigung der Wahrscheinlichkeitsinterpretation !

6 Punkte

H2. Wir betrachten die *Born*sche Näherung

$$f^{(1)}(\vec{K}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \mathrm{d}^3r'\, W(\vec{r}\,')\, \mathrm{e}^{-i(\vec{k}-\vec{k}_0)\cdot\vec{r}\,'}$$

für die Streuung an einem Potential $W(\vec{r})$. Hierbei ist $\vec{K} = \vec{k} - \vec{k}_0$, $\vec{k}_0$ der einfallende und $\vec{k}$ der auslaufende Impuls.

(a) Berechnen Sie den Streuquerschnitt $|f^{(1)}(K_x, K_y, K_z)|^2$ für das Potential

$$W(x, y, z) = V_0\, \mathrm{e}^{-A|x|}\, \mathrm{e}^{-y^2/B}\, \Theta(z_0 - z)\Theta(z + z_0)$$

mit den Konstanten $V_0$, $A > 0$, $B > 0$ und $z_0 > 0$ !

(b) Gegeben sei nun der Spezialfall eines radialsymmetrischen Potentials $W(\vec{r}) = W(r)$. Wie sieht $K = |\vec{K}|$ als Funktion des Streuwinkels $\theta$ aus ($\vec{k}\cdot\vec{k}_0 = k^2\cos\theta$) ? Zeigen Sie, daß im vorliegenden Fall die erste Bornsche Näherung für die Streuamplitude wie folgt lautet:

$$f^{(1)}(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2 K(\theta)} \int_0^\infty \mathrm{d}r'\, r'\, W(r')\, \sin(K(\theta)r') \qquad !$$

(c) Nun werde ein Teilchen der Masse $m$ an einem Potentialtopf

$$W(r) = \begin{cases} -V < 0 & \text{für } r < a \\ 0 & \text{für } r > a \end{cases}$$

gestreut. Berechnen Sie die erste Bornsche Näherung für die Streuamplitude $f(\theta)$ !

(d) Berechnen Sie den differentiellen Streuquerschnitt $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega = |f(\theta)|^2$ für die erste Bornsche Näherung aus Teil (c) und diskutieren Sie diesen für kleine Teilchenenergien $ka \ll 1$ ! Wie lautet insbesondere der totale Streuquerschnitt $\sigma$ in diesem Grenzfall ?

8 Punkte

H3. **Zusatzaufgabe** (Bearbeitung freiwillig)
Zeigen Sie, daß die retardierten und avancierten *Green*schen Funktionen

$$G_\pm(\vec{r}) = -\frac{\mathrm{e}^{\pm ik_0 r}}{4\pi r} \tag{3}$$

Lösungen der folgenden Differentialgleichung sind:

$$\left(\Delta + k_0^2\right) G(\vec{r}) = \delta^{(3)}(\vec{r}) \qquad ! \tag{4}$$

**Hinweis:** Eine mögliche Argumentationsweise basiert auf folgenden Schritten:

(i) Man rechnet nach, daß (3) die Differentialgleichung (4) für $\vec{r} \neq 0$ erfüllt.

(ii) Man integriert (4) über eine Kugel mit Radius $R$ um den Ursprung und prüft mit Hilfe des *Gauß*schen Integralsatzes sowie (3), daß beide Seiten zum gleichen Ergebnis führen.

Gradient und Laplace-Operator in Kugelkoordinaten dürfen verwendet werden.

6 Zusatzpunkte