INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dr. A. Honecker

QUANTENMECHANIK WS 2004/2005

9. Übungsblatt Abgabe der **Hausaufgaben** am 18. Januar 2005 bis 14:00

Anwesenheitsübung (keine Abgabe)

A1. Für ein Zentralpotential $V(r)$ und die Schrödingergleichung zu $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r)$ führt der Ansatz $\Psi(\vec{r}) = R(r)\, Y_{l,m}(\theta,\phi)$ auf

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right) + V(r)\right] R(r) = E\, R(r)\,.$$

Wir betrachten nun den kugelsymmetrischen unendlich hohen Potentialtopf mit Radius a

$$V(r) = \begin{cases} 0 & \text{für } r < a, \\ \infty & \text{für } r > a. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie: Mit $R(r) = \chi(r)/\sqrt{r}$ und $k^2 = 2mE/\hbar^2$ erhält man für $r < a$ die *Bessel*sche Differentialgleichung

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} + k^2 - \frac{(l+1/2)^2}{r^2}\right)\chi(r) = 0 \qquad ! \tag{1}$$

(b) Verifizieren Sie, daß die beiden regulären *Bessel*-Funktionen

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \qquad J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)$$

mit $x = kr$ Lösungen von (1) für $l = 0$ bzw. 1 und dem gegebenen k sind !
Bemerkung: Allgemein kann die für $r = 0$ reguläre Lösung von (1) durch die Bessel-Funktion $J_{l+1/2}(kr)$ ausgedrückt werden.

(c) Leiten Sie aus der Randbedingung $\chi(ka) = 0$ für die beiden Fälle $l = 0$ und $l = 1$ eine Bedingung an k her ! Geben Sie die Energien für $l = 0$ explizit als Funktion einer Quantenzahl n an !

(d) Diskutieren Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeit $|\Psi(\vec{r})|^2$ für die Grundzustandswellenfunktion Ψ als Funktion der Radial-Koordinate r !

Hausaufgaben

H1. Der Hamilton-Operator des kugelsymmetrischen dreidimensionalen harmonischen Oszillators ist gegeben durch:

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\,\vec{r}^{\,2}\,.$$

Mit dem Ansatz $\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{r}\,\chi_l(r)\,Y_{l,m}(\theta,\phi)$ nimmt die radiale Schrödingergleichung folgende Form an:

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}r^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)\chi_l(r) = 0\,. \tag{2}$$

Bemerkung: Für $l = 0$ ist diese Gleichung identisch zur Schrödingergleichung des eindimensionalen harmonischen Oszillators.

(a) Für $r \to 0$ sind die relevanten Terme der Gleichung (2):

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)\chi_l(r) = 0\,.$$

Geben Sie die beiden Lösungen dieser Gleichung an !

(b) Motiviert durch das Ergebnis aus Aufgabenteil (a) und analog zum eindimensionalen harmonischen Oszillator machen wir folgenden Potenzreihenansatz für die Lösung von (2):

$$\chi_l(r) = \mathrm{e}^{-q^2/2}\, q^{l+1} \sum_{k=0}^{\infty} c_{l,k}\, q^k$$

mit $q = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, r$. Setzen Sie diesen Ansatz in die radiale Schrödingergleichung ein und leiten Sie durch Vergleich der Koeffizienten gleicher q-Potenzen eine Rekursionsrelation für die $c_{l,k}$ mit festem l her !

(c) Leiten Sie aus der Abbruchbedingung $c_{l,k} = 0$ für $k > k_l$ einen Ausdruck für die Energie-Eigenwerte E_N her !

(d) Berechnen Sie mit Hilfe des Ergebnisses von Aufgabenteil (c) den Entartungsgrad von $E_N = \hbar\omega\left(N + \frac{3}{2}\right)$ für $N = 0$, 1 und 2 !
Achtung: Nur die Lösungen mit $c_{l,k_l} \neq 0$ sind zu zählen.

(e) Seien $\psi_n(r)$ Eigenfunktionen des eindimensionalen harmonischen Oszillators zu Energie $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$.

i. Begründen Sie, daß
$$\Psi(\vec{r}) = \psi_i(x)\,\psi_j(y)\,\psi_k(z) \tag{3}$$
eine Eigenfunktion des dreidimensionalen harmonischen Oszillators ist !

ii. Bestimmen Sie mit Hilfe von (3) die Eigenwerte E_N des dreidimensionalen harmonischen Oszillators und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem aus Aufgabenteil (c) !

iii. Bestimmen Sie ausgehend von den Lösungen (3) den Entartungsgrad von $E_N = \hbar\omega\left(N + \frac{3}{2}\right)$ für $N = 0$, 1 sowie 2 und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem aus Aufgabenteil (d) !

12 Punkte

H2. **Zusatzaufgabe** (Bearbeitung freiwillig)
Unter Verwendung der radialen Schrödingergleichung für das Wasserstoffatom wollen wir zwei spezielle Erwartungswerte $\langle r^k \rangle$ ausrechnen.

(a) Zeigen Sie
$$\left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle = \frac{2}{(2l+1)\, n^3\, a_0^2}\,,$$
wobei a_0 der *Bohr*sche Radius ist !
Hinweis: Drücken Sie den Energie-Eigenwert als Funktion der radialen Quantenzahl n_r und l aus. Lassen Sie dann in der radialen Schrödingergleichung reelle l zu und differenzieren Sie beide Seiten nach l.

(b) Zeigen Sie
$$\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle = \frac{2}{l(l+1)(2l+1)\, n^3\, a_0^3} \qquad !$$
Hinweis: Differenzieren Sie die radiale Schrödingergleichung nach $\rho = r/a_0$. Ansonsten wird analog zu (a) verfahren. Das Ergebnis aus (a) kann verwendet werden.

5 Zusatzpunkte