INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dr. A. Honecker

QUANTENMECHANIK — WS 2004/2005

8. Übungsblatt — Abgabe der **Hausaufgaben** am 11. Januar 2005 bis 14:00

Anwesenheitsübung (keine Abgabe)

A1. Der Drehimpuls $\vec{L}$ ist gegeben durch

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}\,. \tag{1}$$

Zeigen Sie:

(a) $\vec{r}$ und $\vec{p}$ transformieren sich als Vektoren, d.h.:

$$[L_j, r_k] = i\,\hbar\,\varepsilon_{j,k,l}\,r_l\,, \qquad [L_j, p_k] = i\,\hbar\,\varepsilon_{j,k,l}\,p_l \qquad !$$

(b) $\vec{r}^2$ und $\vec{p}^2$ sind Skalare, d.h.:

$$\left[L_j, \vec{r}^2\right] = 0 = \left[L_j, \vec{p}^2\right] \qquad !$$

(c) Für den Drehimpuls gilt:

$$[L_j, L_k] = i\,\hbar\,\varepsilon_{j,k,l}\,L_l \qquad !$$

Hinweise: (i) Gemäß der Einsteinschen Summenkonvention wird über wiederholte Indizes summiert. (ii) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_l = \varepsilon_{j,k,l}\,a_j\,b_k$. (iii) $[AB, C] = A\,[B, C] + [A, C]\,B$. (iv) $[A, BC] = [A, B]\,C + B\,[A, C]$. (v) $\varepsilon_{r,s,t}\,\varepsilon_{u,v,t} = \delta_{r,u}\,\delta_{s,v} - \delta_{r,v}\,\delta_{s,u}$.

Hausaufgaben

H1. (a) Zeigen Sie: In Kugelkoordinaten $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$ gilt für den in (1) gegebenen Drehimpuls:

$$\begin{aligned}
L_x &= i\hbar\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\\
L_y &= i\hbar\left(-\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin\phi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\\
L_z &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}\\
\vec{L}^2 &= -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) \qquad !
\end{aligned}$$

Hinweis: Beim Invertieren der Jacobi-Matrix $D\vec{f}(r,\theta,\phi)$ mit $\vec{f}(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$ mag es nützlich sein zu wissen, daß $\det D\vec{f} = r^2\sin(\theta)$.

(b) Wir betrachten nun

$$Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{e}^{i\phi/2}\,\sqrt{\sin\theta}\,.$$

Zeigen Sie:

$$L_z\, Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\theta,\phi) = \frac{\hbar}{2}\, Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\theta,\phi)\,, \qquad \vec{L}^2\, Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\theta,\phi) = \frac{3\hbar^2}{4}\, Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\theta,\phi) \qquad !$$

Anmerkung: $L_x L_y\, Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ und $L_y L_x\, Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ sind nicht quadratintegrabel. Deswegen liefert $Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ strenggenommen keine Darstellung der Drehimpuls-Vertauschungsrelationen.

10 Punkte

H2. Eine Form der Kugelflächenfunktionen ist gegeben durch

$$Y_{l,m}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}}\, P_l^m(\cos\theta)\,\mathrm{e}^{im\phi}\,,$$

wobei die zugeordneten *Legendre*-Polynome $P_l^m(z)$ wie folgt definiert werden:

$$P_l^m(z) = \frac{(-1)^m}{2^l l!}\,(1-z^2)^{m/2}\,\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}z^{l+m}}\,\left(z^2-1\right)^l\,.$$

(a) Begründen Sie, daß $$P_l^{-m}(z) = (-1)^m\,\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\,P_l^m(z) \qquad !$$

(b) Zeigen Sie: $$Y_{l,m}(\theta,\phi)^* = (-1)^m\, Y_{l,-m}(\theta,\phi) \qquad !$$

(c) Zeigen Sie, daß die Kugelflächenfunktionen sich unter Spiegelungen am Ursprung $(r,\theta,\phi) \to (r,\pi-\theta,\phi+\pi)$ wie folgt verhalten:

$$Y_{l,m}(\pi-\theta,\phi+\pi) = (-1)^l\, Y_{l,m}(\theta,\phi) \qquad !$$

6 Punkte

H3. **Zusatzaufgabe** (Bearbeitung freiwillig)
Gegeben sind die Matrizen

$$J_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i & -i & 0 \\ i & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & -i \\ 0 & i & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie: Die J_r erfüllen die Drehimpuls-Vertauschungs-Relationen

$$[J_r, J_s] = i\sum_{t=1}^{3} \varepsilon_{r,s,t}\, J_t \qquad !$$

(b) Berechnen Sie $\vec{J}^2$ und geben Sie eine simultane Basis von Eigenvektoren von $\vec{J}^2$ und J_3 an !

(c) Wie lauten die zugehörigen Eigenwerte von $\vec{J}^2$ und J_3 ? Interpretieren Sie Ihr Ergebnis unter Berücksichtigung der Tatsache, daß Drehimpuls j einem Eigenwert $j(j+1)$ von $\vec{J}^2$ entspricht und die zugehörige Dimension der Darstellung $2j+1$ ist !

4 Zusatzpunkte

Frohe Weihnachten und einen Guten Start ins Jahr 2005 !