INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Prof. Dr. W. Brenig
Dr. A. Honecker

QUANTENMECHANIK WS 2004/2005

7. Übungsblatt Abgabe am 14. Dezember bis 14:00

H1. Der Hamilton-Operator des eindimensionalen harmonischen Oszillators ist gegeben durch:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{r}^2 \,. \tag{1}$$

In der Vorlesung wurde gezeigt, wie das Spektrum mittels der Auf- und Absteigeoperatoren

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{r} - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,\hat{p}\,, \qquad \hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\hat{r} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,\hat{p}$$

bestimmt werden kann. Hier wollen wir eine Ortsdarstellung der Eigenvektoren $|\,n\rangle$ ($\hat{H}\,|\,n\rangle = \hbar\omega(n+1/2)\,|\,n\rangle$) bestimmen.

(a) Setzen Sie die Ortsdarstellung von $\hat{p}$ in die Operatoren $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ ein und drücken Sie diese durch die dimensionslose Größe

$$q = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,r$$

aus !
Hinweis: Verwenden Sie im folgenden immer die dimensionslose Größe q (soweit möglich) !

(b) Interpretieren Sie die Bedingung

$$\hat{a}\,|\,0\rangle = 0$$

als Differentialgleichung für die Grundzustandswellenfunktion $\psi_0(q) = \langle q\,|\,0\rangle$ und bestimmen Sie die *normierte* ($\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}r\,|\psi_0(r)|^2 = 1$) Lösung $\psi_0(q)$!

(c) Zeigen Sie durch wiederholte Anwendung von $\hat{a}^\dagger$ auf $\psi_0(q)$, daß $\psi_n(q) \propto \left(\hat{a}^\dagger\right)^n \psi_0(q)$ die Form

$$\psi_n(q) = C_n\,\mathrm{e}^{-q^2/2}\,H_n(q)$$

hat. Hierbei ist $H_n(q)$ das $n$te *Hermite*-Polynom

$$H_n(q) = \mathrm{e}^{q^2/2}\left(q - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\right)^n \mathrm{e}^{-q^2/2}\,. \tag{2}$$

Bestimmen Sie die Normierungskonstante C_n !

(d) Leiten Sie aus den Relationen $\hat{a}\,|\,n\rangle = \sqrt{n}\,|\,n-1\rangle$, $\hat{a}^\dagger\,|\,n\rangle = \sqrt{n+1}\,|\,n+1\rangle$ eine Rekursionsrelation für $H_n(q)$ her ! Bestimmen Sie daraus H_n mit $n = 1$, 2, 3, 4 !
Wieviele Nullstellen hat $H_n(q)$ (Knotensatz) ?
Hinweis: H_0 ist explizit aus der Definition (2) zu bestimmen. H_1 erhält man aus H_0, da hier in der Rekursionsrelation H_{-1} mit Koeffizient 0 auftritt.

(e) Skizzieren Sie

$$\frac{\psi_n(q)}{\sqrt[4]{\frac{m\omega}{\hbar}}}$$

für $n = 0$, 1, 2 und 3 !

8 Punkte

H2. Wir wollen nun einen alternativen Zugang zum eindimensionalen harmonischen Oszillator entwickeln.

(a) Bringen Sie die stationäre Schrödingergleichung zu dem Hamilton-Operator (1) in die Form

$$\frac{\hbar\omega}{2}\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}q^2}+q^2\right)\psi_n(q) = E_n\,\psi_n(q) \qquad ! \tag{3}$$

(b) Geben Sie eine *normierbare* Lösung der Differentialgleichung

$$\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}q^2}+q^2-1\right) f(q) = \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}+q\right)\left(+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}+q\right) f(q) = 0$$

an !

Bemerkung: Hierbei erhalten Sie einen Hinweis auf die Asymptotik von $\psi_n(q)$ for große q.

(c) Das Ergebnis aus Aufgabenteil (b) motiviert folgenden Lösungsansatz:

$$\psi_n(q) = \mathrm{e}^{-q^2/2}\sum_{l=0}^{\infty}\alpha_l\,q^l\,.$$

Setzen Sie diesen Ansatz in die Differentialgleichung (3) ein und zeigen Sie durch Vergleich der Koeffizienten gleicher q-Potenzen, daß die α_l folgende Rekursionsrelation erfüllen:

$$(l+2)(l+1)\,\alpha_{l+2} = \left((2l+1)-\frac{2E_n}{\hbar\omega}\right)\alpha_l \qquad ! \tag{4}$$

(d) Begründen Sie, warum aus der Normierbarkeit der Wellenfunktion $\psi_n(q)$ eine Abbruchbedingung $\alpha_l = 0$ für $l > l_0$ folgt ! Leiten Sie aus dieser Abbruchbedingung einen Ausdruck für die Energie-Eigenwerte E_n her !

(e) Lösen Sie die Rekursionsrelation (4) für die α_l mit der Abbruchbedingung aus Aufgabenteil (d) für den Grundzustand $n = 0$! Geben Sie schließlich die explizite Form der *normierten* Wellenfunktion $\psi_0(r)$ an !

8 Punkte

H3. **Zusatzaufgabe** (Bearbeitung freiwillig)

Wie Sie wissen, kann man sich z.B. anhand der Ortsdarstellung in einer konkreten Basis davon überzeugen, daß in drei Dimensionen die *Heisenberg*schen Vertauschungsrelationen lauten:

$$[\hat{p}_j, \hat{x}_k] = \frac{\hbar}{i}\,\delta_{j,k}\,\mathbb{1}\,. \tag{5}$$

Sei $\hat{\vec{p}}' = V\,U^\dagger\,\hat{\vec{p}}\,U$, $\hat{\vec{x}}' = V\,U^\dagger\,\hat{\vec{x}}\,U$ mit V einer orthogonalen Abbildung in $\mathbb{R}^3$ und U einer unitären Abbildung im Hilbertraum. Zeigen Sie: Die Komponenten von $\hat{\vec{p}}'$ und $\hat{\vec{x}}'$ erfüllen ebenfalls die Heisenbergschen Vertauschungsrelationen (5) !

Bemerkung: Da Wechsel zwischen orthonormalen Basen durch orthogonale Matrizen V vermittelt werden, folgt daraus inbesondere, daß (5) in einer beliebigen orthonormalen Basis gilt.

3 Zusatzpunkte